線形代数 (再履修) 中間試験 学籍番号 | | | | | | | 氏名

点/40 点

$\boxed{1}$ 次の各問に答えなさい (詳細な説明は不要. 問に答えるのみでよい). (各 4 点)

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交するベクトルを次の (ア) ～ (エ) の中からすべて選びなさい.

(ア) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (イ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ウ) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (エ) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) イ、エ

(2) 複素数 $z = 2 - i$ と絶対値が等しい複素数を次の (ア) ～ (エ) の中からすべて選びなさい. ただし, i は虚数単位とする.

(ア) $5i$ (イ) $\sqrt{5}$ (ウ) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$ (エ) 3

(2) イ, ウ

(3) 対称行列を次の (ア) ～ (エ) の中からすべて選びなさい.

(ア) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (イ) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(ウ) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (エ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) ア、ウ

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = 8 \end{cases}$$

の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるとする (k は任意の実数. 解の自由度は 1). このとき, ベクトル $\vec{v}$ として適当なものを次の (ア) ～ (エ) の中からすべて選びなさい.

(ア) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (イ) $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ウ) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (エ) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(4) ウ、エ

$\boxed{2}$ 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めなさい. (4 点)

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 2 - (-2) \times 3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

(2010.11.12 担当 : 佐藤)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと $P = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

3 行列 $P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ に対し，P^{1112} を求めなさい（数学的帰納法で証明しなくてもよい）．(6 点)

(2+2+2)

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_2 & \vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & 2\vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^3 = P \cdot P^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & \vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_2 & 2\vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & 3\vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

一般に $P^n = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & n\vec{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ したがって $P^{1112} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2224 \\ 0 & 1 & 3336 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

4 連立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y - 6z = -4 \\ x + 2y - 5z = -1 \\ -2x - y - 2z = 8 \end{cases}$

の解が存在するか判定し，解が存在する場合はその <u>解</u> と <u>解の自由度</u> を答えなさい．(7 点)

(1+4) (2)

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

したがって解は存在し，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける //

（k は任意，定数．解の自由度は 1 //．）

5 斉次連立方程式 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + cz = 0 \end{cases}$

が非自明解を持つための <u>c の条件</u> を求めなさい．また，c がその条件を満たすときの <u>連立方程式の解</u> を求めなさい．(7 点)

(1+3) (3)

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & c-3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 \end{array}\right) (*)$$

ここで $c-1 \neq 0$ ならば $(*) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

となり，この場合，自明解しかもたない

$c-1=0$ のとき // $(*) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ となり

(2010.11.12 担当：佐藤)

この場合，非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ // をもつ。