線形代数（再履修）第 1 回小テスト問題

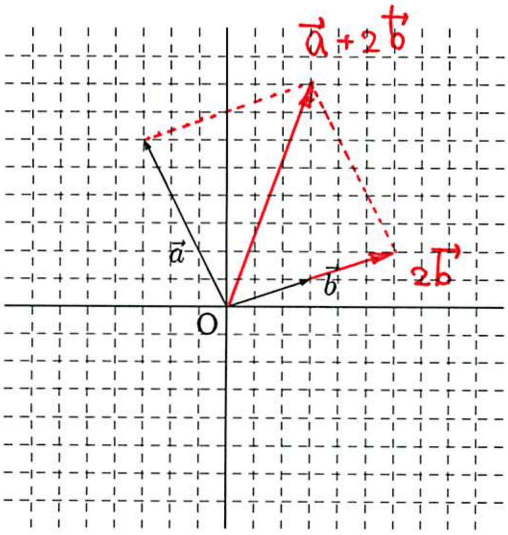
2010.9.17（担当：佐藤）

注意事項

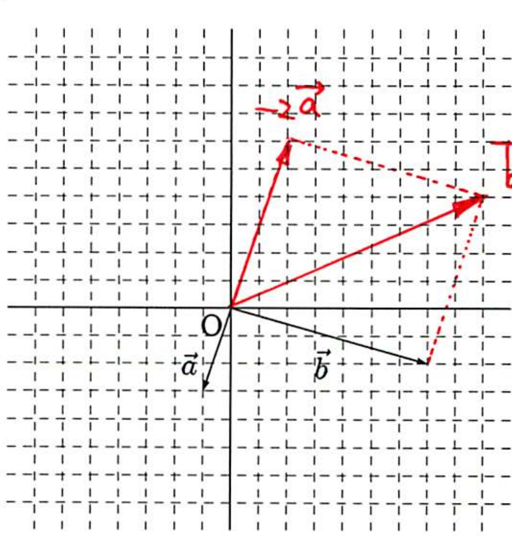
(1) 出題順に解答しなくてもよいが，どの問題の解かがわかるように解を記述すること．
(2) 答案は解を導きだす過程もできるだけ丁寧に記述すること．説明が不十分な解答は減点の対象とする．
(3) 字の粗暴な解答は減点の対象とする．
(4) 答案用紙が足りなくなった者は挙手をして試験監督者に追加の用紙をもらうこと．なお，答案用紙の裏を使用しても構わない．
(5) 試験時間終了前に すべての解答 が終わった者は途中退席しても構わない．
(6) 答案回収後，略解を配布する．必ず自己採点すること．

$\boxed{1}$ 図中のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次のベクトルを図示しなさい．（各 8 点）

(1) $\vec{a}+2\vec{b}$



(2) $\vec{b}-2\vec{a}$



$\boxed{2}$ ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ に対して，(i) 次のベクトル $\vec{u}$ の成分表示を求めなさい．また，(ii) 長さ $|\vec{u}|$ を計算しなさい．（各 8 点）

(1) $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}$ $= 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

(2) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(1) (ii) $|\vec{u}|$ $\sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$= \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

裏につづく

$= \begin{pmatrix}2/3\\4/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

3 次のベクトル $\vec{a}$ に対し，$c\vec{a}$ の長さが 1 になるような正の実数 c を求めなさい．（各 10 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 　　$c = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 　　$c = \dfrac{1}{5}$

4 ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の成分表示を k を用いて表しなさい． 　　$\begin{pmatrix} 1-2k \\ -k \end{pmatrix}$

(2) ベクトル $\vec{a} - k\vec{b}$ の長さが 1 になるような実数 k をすべて求めなさい． 　　$k = 0$ または $\dfrac{4}{5}$

5 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，(i) $|\vec{a}|$, (ii) $|\vec{b}|$, (iii) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, (vi) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の余弦（$\cos\theta$）を求めなさい．（各 9 点）

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$，$|\vec{b}| = \sqrt{6}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{6}$，$|\vec{b}| = \sqrt{14}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\cos\theta = 0$

6 空間ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい．（10 点）

2つのベクトルが直交 $\Longleftrightarrow$ 内積が 0

$$\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ c \end{pmatrix} = 4 + c(c-3) - c = c^2 - 4c + 4$$

$$= (c-2)^2$$

よって $(c-2)^2 = 0$ となるのは $\underline{c = 2 \text{ のとき}}$