□ キーワード：クラメールの公式

クラメールの公式

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ と n 項数ベクトル $\boldsymbol{b}=(b_i)$ に対し，A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく；

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

行列 A が正則行列のとき，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{pmatrix}$$

と書ける．これをクラメールの公式という．

例題 **5.5.** 次の連立方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ -3x+2y+2z=-1 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases} \tag{5.1}$$

解. 連立方程式 (5.1) を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．係数行列を $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，定数項ベクトルを $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおき，

A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列を A_j とおく（$j = 1, 2, 3$）と，

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

となる．各行列の行列式を計算すると

$$\det(A_1) = -26, \quad \det(A_2) = 26, \quad \det(A_3) = -52, \quad \det(A) = -26.$$

したがって，クラメールの公式から，(5.1) の解は

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \mathbf{1}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \mathbf{-1}, \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \mathbf{2}.$$

問題 5.11. 次の連立方程式[*1]の解をクラメールの公式を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

[*1] プリント p.12，問題 3.5 (2)

クラメールの公式の証明

連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対し，$A'=A_j$ （A の第 j 列を bmb に置き換えた行列）とおく．このとき，

- A' の構成の仕方より，A' の余因子 Δ'_{lj} は A の余因子 Δ_{lj} に等しいことがわかる（$l=1,2,\dots,n$）．
- $\det(A')$ を第 j 列に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned}\det(A_j)=\det(A')=&\Delta'_{1j}b_1+\Delta'_{2j}b_2+\cdots+\Delta'_{nj}b_n\\ =&\Delta_{1j}b_1+\Delta_{2j}b_2+\cdots+\Delta_{nj}b_n.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\tilde{A}\boldsymbol{b}&=\begin{pmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{21}&\cdots&\Delta_{n1}\\ \Delta_{12}&\Delta_{22}&\cdots&\Delta_{n2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \Delta_{1n}&\Delta_{2n}&\cdots&\Delta_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\Delta_{11}b_1+\Delta_{21}b_2+\cdots+\Delta_{n1}b_n\\ \Delta_{12}b_1+\Delta_{22}b_2+\cdots+\Delta_{n2}b_n\\ \vdots\\ \Delta_{1n}b_1+\Delta_{2n}b_2+\cdots+\Delta_{nn}b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\det(A_1)\\ \det(A_2)\\ \vdots\\ \det(A_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．A が正則行列ならば，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ であるから，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}\det(A_1)\\ \det(A_2)\\ \vdots\\ \det(A_n)\end{pmatrix}$$

と書くことができる．