□ キーワード：余因子行列

余因子行列

n 次正方行列 A に対し，A の余因子を成分とする行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列とよぶ（$\tilde{A}$ の成分と余因子の添字のつけ方の注意せよ）.

例題 **5.4.** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式と余因子行列を求めよ.

解. 第 1 列について余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(A) =& 2 \times \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \times \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ =& 2 \times (-3) + (-1) \times (-12) = \mathbf{6}. \end{aligned}$$

次に，余因子行列を求める．各余因子 A_{ij} は

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-3}, \quad \Delta_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{-4},$$

$$\Delta_{13} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{-1}, \quad \Delta_{21} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{12},$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{8}, \quad \Delta_{23} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{2},$$

$$\Delta_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{9}, \quad \Delta_{32} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{6},$$

$$\Delta_{33} = (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{3}.$$

となるので，余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ -4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 5.10. 問題 5.3（p.22）の行列 C について次の問に答えなさい．

(1) C の余因子をすべて求め，C の余因子行列 $\tilde{C}$ を書きなさい．

(2) $C\tilde{C}$ を計算しなさい．

余因子行列の性質

- 余因子展開の式 (p.23 参照) は，$A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分がすべて $\det(A)$ に等しい ことを意味している．
- $A\tilde{A}$ および $\tilde{A}A$ の 対角成分以外の成分はすべて 0 となる（以下，証明）．
  - 行列 $A = (a_{ij})$ から，次のようにして行列 $A' = (a'_{ij})$ を構成する；
    A' の k 行目は A の i 行目に等しく（$a'_{kj} = a_{ij}, j = 1, \ldots, n$），$l\,(\neq k)$ 行目は A の l 行目に等しい（$a'_{lj} = a_{lj}$，$l \neq k$，$j = 1, \ldots, n$）．
  - A の余因子 Δ_{kj} と A' の余因子 Δ'_{kj} は等しい（$j = 1, 2, \ldots, n$）．
  - A' は k 行目と i 行目が等しいので，行列式の性質から $\det(A') = 0$．
  - A' を k 行目に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned} 0 = \det(A') &= a'_{k1}\Delta'_{k1} + a'_{k2}\Delta'_{k2} + \cdots + a'_{kn}\Delta'_{kn} \\ &= a_{i1}\Delta_{k1} + a_{i2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta_{kn}. \end{aligned}$$

- 以上のことから，余因子行列は

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = \det(A)\,E_n$$

を満たす．特に，$\det(A) \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}}$ と書ける．