

□ キーワード：余因子，行列式の余因子展開

余因子

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し， $(n-1)$ 次正方行列 A_{ij} を

$$A_{ij} = (A \text{ から } i \text{ 行目と } j \text{ 列目を取り除いた行列})$$

と定義する.

- $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ を A の (i, j) 余因子とよぶ.
- 任意の i に対し，以下が成り立つ（余因子展開）；

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} = a_{i1} \Delta_{i1} + a_{i2} \Delta_{i2} + \cdots + a_{in} \Delta_{in},$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \Delta_{ji} = a_{1i} \Delta_{1i} + a_{2i} \Delta_{2i} + \cdots + a_{ni} \Delta_{ni}.$$

- 行列の性質 d-4) は，第 1 行（または第 1 列）に関する余因子展開である.
- 行列式を求めるとき，成分 0 を多く含む行（または列）に関して余因子展開すると計算が比較的簡単になる.

例題 5.3. 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

解. 行列式の性質を用いて，なるべく 0 を多く含む行（または列）をつくるように行列を変形していき，その行（または列）に関して行列式を展開する.

(第 1 列を (-1) 倍して第 2 列, 第 3 列にそれぞれ加える)

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 1 & 5 \\ 11 & 5 & 2 & 6 \\ 10 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列を (-1) 倍して第 2 列に加える)

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \\ 10 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 3 列に関して展開)

$$= -2 \times 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 12 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(第 2 列を (-1) 倍して第 1 列に, (-4) 倍して第 3 列にそれぞれ加える)

$$= -6 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

(第 1 行に関して展開)

$$= 6 \det \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} = 6(121 - 11) = \mathbf{660}.$$

問題 5.9. 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$