□ キーワード：行列式

行列式の性質

d-1) 行に関する線型性：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1}+cb_{i1} \ \cdots \ a_{ij}+cb_{ij} & \cdots & a_{in}+cb_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ b_{i1} \ \cdots & b_{ij} & \cdots \ b_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

d-2) 任意の行の入れ換えに対して，(-1) 倍される：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

d-3) 任意の行をスカラー倍して，別の行に加えても行列式は変わらない：

$$\det\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i1} \ \cdots & a_{ij} & \cdots \ a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{k1} \ \cdots & a_{kj} & \cdots \ a_{kn} \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1}+c\,a_{k1} & \cdots & a_{ij}+c\,a_{kj} & \cdots & a_{in}+c\,a_{kn} \\ & & \cdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ & & \cdots & & \end{pmatrix}$$

d-4) $\det\left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline & \\ * & A \\ & \end{array}\right) = a\cdot\det(A)$

d-5) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

d-6) $\det({}^tA)=\det(A)$

（この性質から，d-1) 〜 3) は列に関する操作ついても同様のことが成り立つ）

例題 5.1. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

解． 方針：行列式の性質 d-2，d-3) を使って行列を変形し，d-4) を使って行列のサイズを小さくしていく．

$$=\det\begin{pmatrix} 3 & 2-\sqrt{2} & -4+5\sqrt{3} & -5 \\ 1 & -6+4\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4 行目を適当にスカラー倍して $1,2,3$ 行目に加えて，1 行目と 4 行目を入れ換える)

$$=\det\begin{pmatrix} 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \\ 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{array}\right)$$

$$=-\det\begin{pmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2-7\sqrt{2} & -7+5\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

(2 行目を (-5) 倍して 3 行目に加える)

$$=-\det\begin{pmatrix} -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 行目と 2 行目を交換し，1 列目と 3 列目を入れ換える)

$$=\det\begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & -2+\sqrt{3} & -1 \\ -6+2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -8+3\sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\det\left(\begin{array}{c|cc} -1 & -2+\sqrt{3} & 2-2\sqrt{2} \\ \hline 0 & 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -8+3\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix} 2 & -6+2\sqrt{2} \\ 3 & -8+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2(-8+3\sqrt{2}) - 3(-6+2\sqrt{2}) = \mathbf{2}.$$

問題 5.6. 問題 5.3 の行列 A, B, C の行列式を行基本変形を用いて（例題 5.1 を参考にして）求めなさい．

問題 5.7. 次の行列の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

例題 5.2. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい．

解.

$$\det\begin{pmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(2 列目を 1 列目に加える)

$$=\det\begin{pmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -b-a & -a & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b)\det\begin{pmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{pmatrix}$$

(1 行目を 2 行目から引き，1 行目を 3 行目に加える)

$$=(a+b)\det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & -c & -b \\ \hline 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{array}\right) = (a+b)\det\begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)(a+c)\det\begin{pmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)(a+c)\left\{(a+b+2c)+(-a+b)\right\} = \boldsymbol{2(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

問題 5.8. 行列 $\begin{pmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{pmatrix}$ の行列式を求めなさい．

問題 5.9. 正則行列 A に対し，$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ が成り立つことを示しなさい．[*1]

[*1] ヒント：行列式の性質 d-5)