□ キーワード：行列式，置換，置換の符号，サラスの公式

行列式

n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し，A の行列式 $\det(A)$ を

$$\det(A) = \sum_{\sigma : n \text{ 次の置換}} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義する．

問題 5.1. 3 次の置換をすべて書き出し，その符号を求めなさい．

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \ \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \ \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad ,$$

$$\mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \ \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad , \ \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} = \qquad .$$

問題 5.2. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ を A の成分を用いて具体的に書きなさい．

問題 5.3. サラスの公式を用いて，次の行列の行列式を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 5.4. 問題 5.3 の行列 A, B, C について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列の積 AB を計算し，行列式 $\det(AB)$ を求めなさい．
(2) C の逆行列 C^{-1} を計算し，行列式 $\det(C^{-1})$ を求めなさい．

問題 5.5. 3 次の基本行列 P_{ij}, $E_i(c)$, $E_{ij}(c)$ [*1]の行列式を求めなさい．

[*1] プリント p.16（11 月 16 日 配布）を参照せよ．