正則行列の基本行列による積表示

n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．行基本変形は基本行列を左から掛ける操作に対応することから，このとき

$$M_1 M_2 \cdots M_k A = E_n \tag{4.2}$$

となるような適当な基本行列 $M_1, \ldots, M_k$ が存在する．ここで，(4.2) の両辺に左から $M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$ をかけよう．すると，左辺は

$$\begin{aligned}(M_k^{-1} \cdots M_2^{-1} M_1^{-1})(M_1 M_2 \cdots M_k A) =&(M_k^{-1} \cdots M_2^{-1})(M_1^{-1} M_1)(M_2 \cdots M_k A)\\ =&(M_k^{-1} \cdots M_2^{-1})(M_2 \cdots M_k A)\\ &\vdots\\ =&A\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$A = M_k^{-1} M_{k-1}^{-1} \cdots M_1^{-1}$$

を得る．以上のことから，正則行列は基本行列の積として表すことができる．しかし，簡約階段行列への基本変形の仕方が一意的でないように，基本行列の積表示の仕方も 一意的ではない．

例題 **4.2.** 次の行列の基本行列の積で表しなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解. プリント p.17 の基本変形の手順から，

$$P_{23} E_{12}(-1)\, E_{32}(-2)\, E_2\left(-\tfrac{1}{6}\right)\, E_{13}(1)\, E_{23}(-7)\, E_{21}(-4) A = E_3.$$

したがって，

$$\begin{aligned}A =&E_{21}(-4)^{-1}\, E_{23}(-7)^{-1}\, E_{13}(1)^{-1}\, E_2\left(-\tfrac{1}{6}\right)^{-1}\, E_{32}(-2)^{-1}\, E_{12}(-1)^{-1}\, P_{23}^{-1}\\ =&E_{21}(4)\, E_{23}(7)\, E_{13}(-1)\, E_2(-6)\, E_{32}(2)\, E_{12}(1)\, P_{23}.\end{aligned}$$

問題 4.10. 例題 4.2 の方法を使って，問題 4.1 の行列 A, B および，問題 4.2 の各行列を基本行列の積で表しなさい．