線形代数（再履修）第 8 回小テスト解答　　2009.11.27（担当：佐藤）

$\boxed{1}$ 次の連立方程式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と行列表示するとき，(i) 係数行列 A の逆行列を求めなさい（15 点）．また，(ii)$A^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算し，連立方程式の解を求めなさい（必ず検算すること）（10 点）．

(1) $\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ -2x-y+z=2 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\quad \text{解は} \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ -2x-y+z=2 \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\quad \text{解は} \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，各 $k=1,2,3$ に対し，$A\boldsymbol{v}_k=c_k\boldsymbol{v}_k$ となるような実数 c_k を求めなさい．（各 10 点）

$\underline{c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=3}$

(2) $\boldsymbol{v}_k$ を並べてできる 3 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ に対し，$P^{-1}AP$ を求めなさい．（20 点）

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$