□ キーワード：逆行列，連立方程式，階数

係数行列が正則な連立方程式

係数行列 A が n 次正方行列となるような連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．A が正則行列ならば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の左から A^{-1} を掛けることにより，

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

となり，方程式の解はただ 1 つ決まる（斉次連立方程式の場合は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるから，自明解しか持たないことがわかる）．また，このことは

$$\text{行列 } A \text{ が正則} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$$

であることを意味する（プリント p.15「階数と連立方程式の解の自由度」参照）．

問題 4.8. 問題 4.4 (1), (2), (3) の各行列は，例題 3.2，問題 3.5 (1), (2) の連立方程式の係数行列に対応する[*1]．上の議論を参考にして，例題 3.2，問題 3.5 (1), (2) の各連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と $A^{-1}\boldsymbol{b}$ を比較しなさい．

問題 4.9. 次の連立方程式を (i) 掃き出し法（拡大係数行列を行基本変形する方法）と (ii) 係数行列の逆行列を求める方法を用いて解きなさい．

$$(1)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \\ -x + 2z = 5 \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ x - 3y + z = -2 \\ x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

[*1] ちなみに，問題 4.4 (4), (5) の各行列は 問題 3.7 (1), (4) の連立方程式の係数行列に対応する．