□ キーワード：逆行列

逆行列の求め方

- n 次正則行列 A が行基本変形により単位行列 E_n に変形できたとしよう．このとき，行基本変形は基本行列を左から掛ける操作に対応することから

$$M_1M_2\cdots M_kA = E_n \tag{4.1}$$

となるような基本行列 $M_1,\dots,M_k$ が存在する．
- (4.1) は，逆行列の定義より，$A^{-1} = M_1M_2\cdots M_k$ であること意味する．
- $n\times 2n$ 行列 $(\,A\,|\,E_n\,)$ に (4.1) と同じ行基本変形を施すと

$$\left(\;A\;\middle|\;E_n\;\right) \xrightarrow[M_1M_2\cdots M_k\times]{} \left(\;M_1M_2\cdots M_kA\;\middle|\;M_1M_2\cdots M_k\;\right) = \left(\;E_n\;\middle|\;A^{-1}\;\right)$$

となる．
- 以上のことから，$\boldsymbol{(\,A\,|\,E_n\,)}$ を行基本変形により $\boldsymbol{(\,E_n\,|\,P\,)}$ の形に変形したとき，$\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{A}$ の逆行列である．

例題 **4.1.** 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{21}(-4)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(1)E_{23}(-7)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2\left(-\frac{1}{6}\right)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-1)E_{32}(-2)\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[P_{23}\times]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right).$$

したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

問題 4.4. 例題 4.1 の方法を使って，問題 4.1 の行列 A, B の逆行列を計算しなさい.

問題 4.5. 次の行列の逆行列を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 4.6. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が正則行列になるための k の条件を求めよ．また，そのときの A の逆行列を求めよ.

問題 4.7. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 26 & -20 \\ 2 & 6 & -4 \\ 6 & 18 & -13 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問に答えなさい.

(1) P^{-1} を求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(3) (2) の結果を利用して，A^n (n は自然数) を求めなさい.