□ キーワード：正則行列，逆行列

問題 4.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい．

(1) $A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ が A の逆行列であることを確かめなさい．

(2) $B' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ が B の逆行列であることを確かめなさい．

(3) AB, $B'A'$ を求めなさい．また，$B'A'$ が AB の逆行列であることを確かめなさい．

(4) BA, $A'B'$ を求めなさい．また，$A'B'$ が BA の逆行列であることを確かめなさい．

問題 4.2. $A, B\,(\neq O)$ に対し，$AB = O$ ならば，A も B も正則行列でないことを示しなさい．

問題 4.3. （3 次の基本行列）次の各行列を $3 \times n$ 行列 A に左から掛けるとき，その操作がどのような行基本変形に対応しているか考えなさい．それを踏まえて，各行列の逆行列を求めなさい．

(1) $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $E_1(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $E_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $E_3(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(7) $E_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $E_{13}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (9) $E_{23}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $E_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (11) $E_{31}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (12) $E_{32}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$