□ キーワード：階数，解の自由度

階数

$$\underset{m \times n \text{ 行列}}{A} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \text{ 個}$$

$m \times n$ 行列 A を行基本変形により（簡約）階段行列に変形したとき，${}^t\mathbf{0}$ でない行の個数 r を行列 A の階数といい，$\mathrm{rank}(A)$ で表す．$\mathrm{rank}(A) \leq \max\{m, n\}$ である．

階数と連立方程式の解の自由度

A を $m \times n$ 行列とする．

<u>斉次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の場合</u>

- $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき，

$$A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} E_n \\ \hdashline O \end{pmatrix}$$

となることを意味する．このとき，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は非自明解を持たない．

- $r = \mathrm{rank}(A) < n$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は式の数が r 個，未知数の数が n 個の方程式に簡約化される．すべての式に共通に含まれる未知数は $(n - r)$ 個であるから，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は非自明解を持ち，解の自由度は $(n - \mathrm{rank}(A))$ である．

<u>一般の 1 次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合</u>

- $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) \neq \mathrm{rank}(A)$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない．
- $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A) = n$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解はただ 1 つに決まる．
- $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}(A) < n$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解は無限個あり，解の自由度は $(n - \mathrm{rank}(A))$ である．

問題 3.9. 問題 3.1, 3.5, 3.6, 3.7 の各連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して，(i) $\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{b})$ を求め，(ii) 階数と解の存在性，自由度の関係（上で述べた事）を確認しなさい．