□ キーワード：斉次連立方程式，自明解と非自明解

斉次 1 次連立方程式とは

定数項が 0 の 1 次連立方程式；

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

- 斉次連立方程式は必ず解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ．これを自明な解という．
- $\boldsymbol{0}$ でない解を非自明な解という．

- $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解ならば，任意の実数 c に対し $c\boldsymbol{v}$ も $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である．
- $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解ならば，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ も $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である．

以上のことから，非自明な解が存在するとき，解は一般に

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \qquad (c_1, \ldots, c_k \text{ は実数})$$

と表される．このときのベクトルの数 k を解の自由度という．

問題 3.7. 次の連立方程式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} 3x - 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} -2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

問題 3.8. 次の連立方程式が非自明な解を持つための条件を求めなさい．

(1) $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (t-1)x - 2y + 2z = 0 \\ x + (t-4)y + 2z = 0 \\ x - y + (t-1)z = 0 \end{cases}$