□ キーワード：行基本変形，連立方程式の行列表示

例題 3.2. 次の連立１次方程式の解を求めなさい．

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ -x - y + 3z = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \tag{3.1}$$

解. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，(3.1) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる (行列表示)．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は行基本変形により

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 11 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 11 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

と変形できる．このことから，(3.1) の解が $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$ であることがわかる．

問題 3.5. 次の連立方程式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -3x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

例題 3.3. 次の連立１次方程式の解を求めなさい．

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + 7z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

解. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，連立一次方程式 (3.2) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と行列表示することができる．ここで，行列 $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & -1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と簡約階段行列に変形できる．これは (3.2) が方程式

$$\begin{cases} x + 26z = -4 \\ y - 15z = 3 \end{cases} \tag{3.3}$$

と簡約化できることを意味する（つまり，(3.2) の解は (3.3) の解であり，この逆もまた正しい）．(3.3) の 2 式に共通に含まれる未知数 z を $z = k$ とおくと $x = -4 - 26k$, $y = 3 + 15k$ となる．したがって，方程式 (3.2) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける（ただし k は実数）．

問題 **3.6.** 次の連立方程式の解を求めなさい．

(1) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = 8 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x - 4y + 10z = 1 \\ 3x - 2y - z = -1 \\ 5x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + z - w = 1 \\ -x + y - z + 2w = 0 \\ -3x + 2y - 3z + 5w = -1 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x - 2y - 3z + w = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x - 3y - 2z + w = 2 \\ 4x + 7y + 3z - 2w = -3 \end{cases}$