

□ キーワード：内積，ベクトルのなす角

問題 1.4. 次のベクトル \vec{u}, \vec{v} の (i) 長さ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$, (ii) 内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ および (iii) \vec{u} と \vec{v} のなす角 θ の余弦 ($\cos \theta$) の値を求めなさい.

$$(1) \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(2) \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に対し, } \vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{v} = -\vec{a} + 7\vec{b}$$

$$(3) \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$(5) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ に対し, } \vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{v} = -2\vec{a} - \vec{b}$$

問題 1.5. 空間ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$ が直交するように c を定めなさい.

問題 1.6. ベクトル \vec{a}, \vec{b} を 2 辺とする三角形の面積が $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ に等しいことを示しなさい.*¹

*¹ $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{2}(\text{OA の長さ}) \times (\text{OB の長さ}) \times \sin \theta$ であること (ただし $\theta = \angle AOB$), 内積の性質 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ と三角関数の性質 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて示せ.