□　「一般の平面への透視投影」の理解を深めるための問題

問題 6.1. 以下が成り立つことを確かめなさい．ただし，P は 3 次直交行列とする．

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & P & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & P & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & {}^tP & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(3)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(4)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tP & & -{}^tP\boldsymbol{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

問題 6.2. 方程式 $2x - y + z = 0$ が表す平面を π とする．以下の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{p}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ は π の単位法線ベクトルであることを確かめなさい．

(2) $\boldsymbol{p}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は $\boldsymbol{p}_3$ と直交する単位ベクトルであることを示しなさい．

(3) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p}_3$[*1] とおく．$\boldsymbol{p}_1$ を求めなさい．

(4) 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい．

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ と座標変換するとき，平面 π は $\bar{z} = 0$ となることを示しなさい．

[*1] 左辺は空間ベクトルの外積．