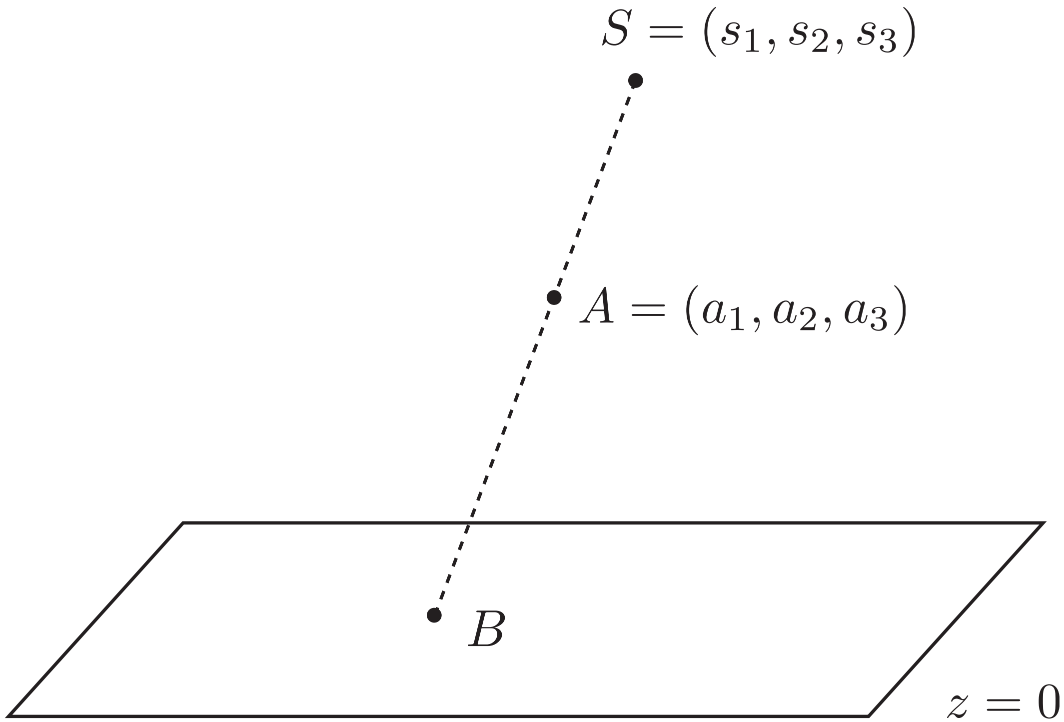
復習：平面 $z = 0$ への透視投影（直交座標系）

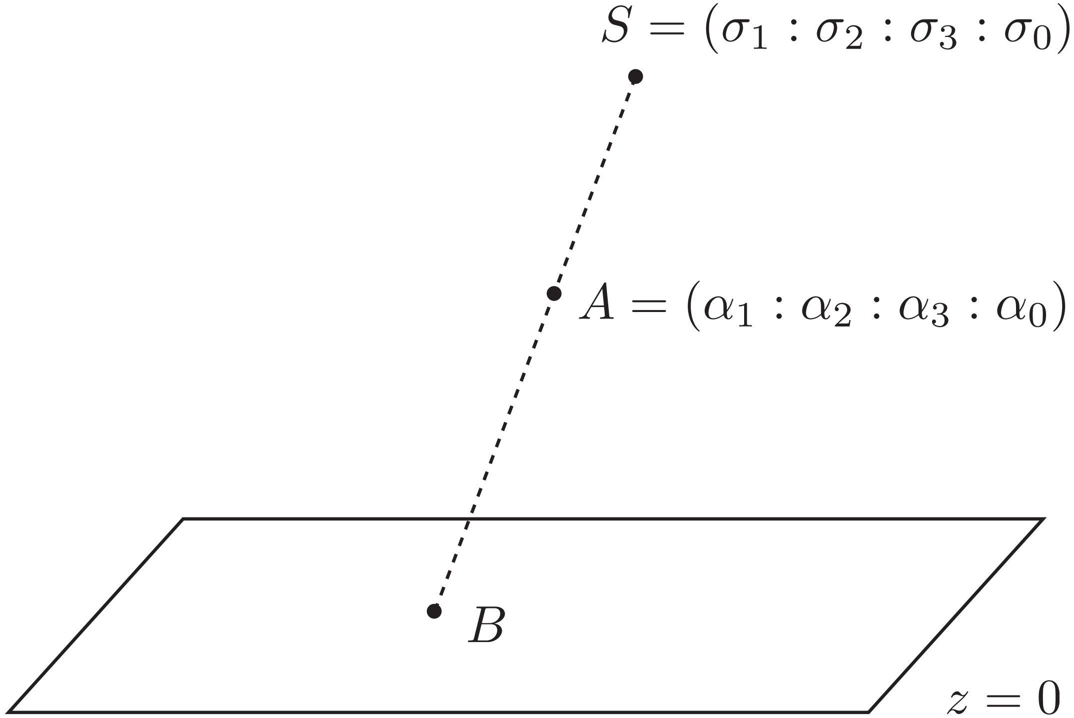
視点を $S = (s_1, s_2, s_3)$ とする透視投影



点 A の投影像 B の座標は $\dfrac{1}{a_3 - s_3}\begin{pmatrix} s_1 a_3 - s_3 a_1 \\ s_2 a_3 - s_3 a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

復習：平面 $z = 0$ への透視投影（同次座標系）

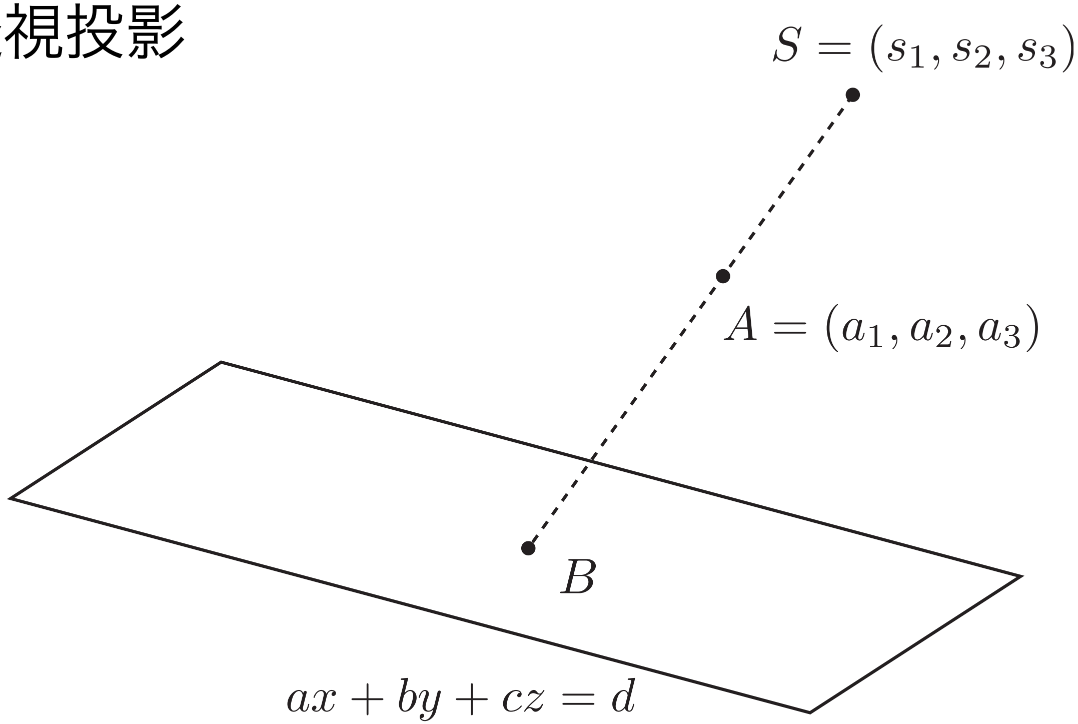
視点を $S = (\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$ とする透視投影



点 A の投影像 B の座標は $\begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$

平面 $ax + by + cz = d$ への透視投影（直交座標系）

視点を $S = (s_1, s_2, s_3)$ とする透視投影

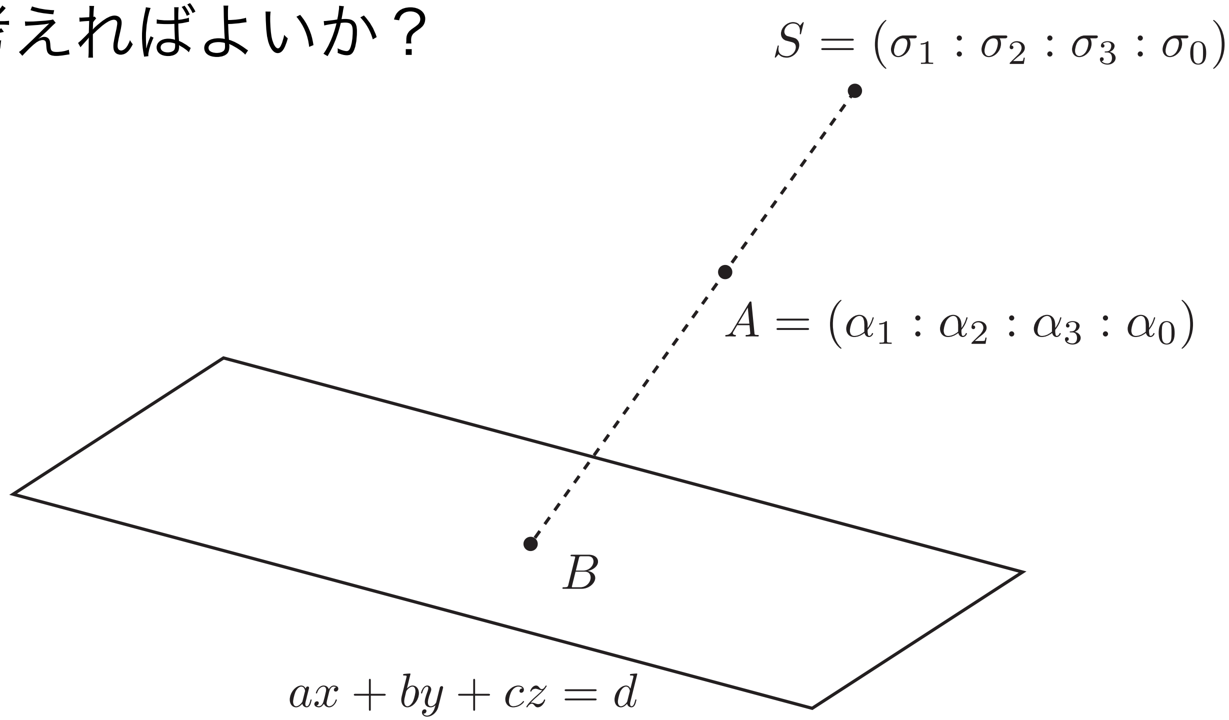


点 A の投影像 B の座標は

$$\frac{1}{a(a_1 - s_1) + b(a_2 - s_2) + c(a_3 - s_3)} \begin{pmatrix} (a_1 - s_1)d + (s_1a_2 - s_2a_1)b + (s_1a_3 - s_3a_1)c \\ (a_2 - s_2)d + (s_2a_1 - s_1a_2)a + (s_2a_3 - s_3a_2)c \\ (a_3 - s_3)d + (s_3a_1 - s_1a_3)a + (s_3a_2 - s_2a_3)b \end{pmatrix}$$

平面 $ax + by + cz = d$ への透視投影（同次座標系）

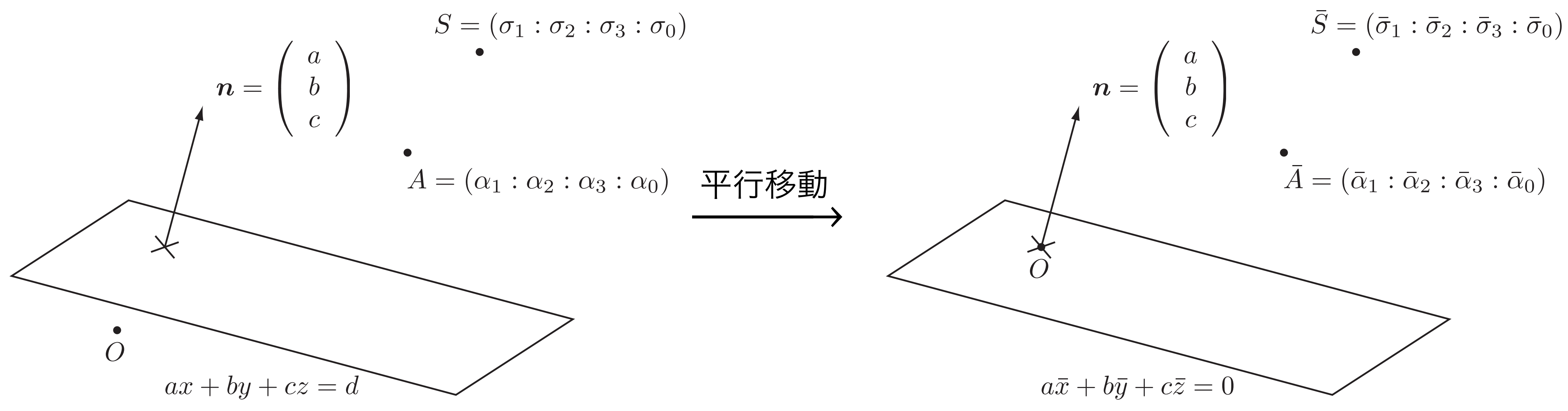
同次座標系では，どのように考えればよいか？



座標変換

平行移動 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ と 直交変換 $\left(\begin{array}{ccc:c} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

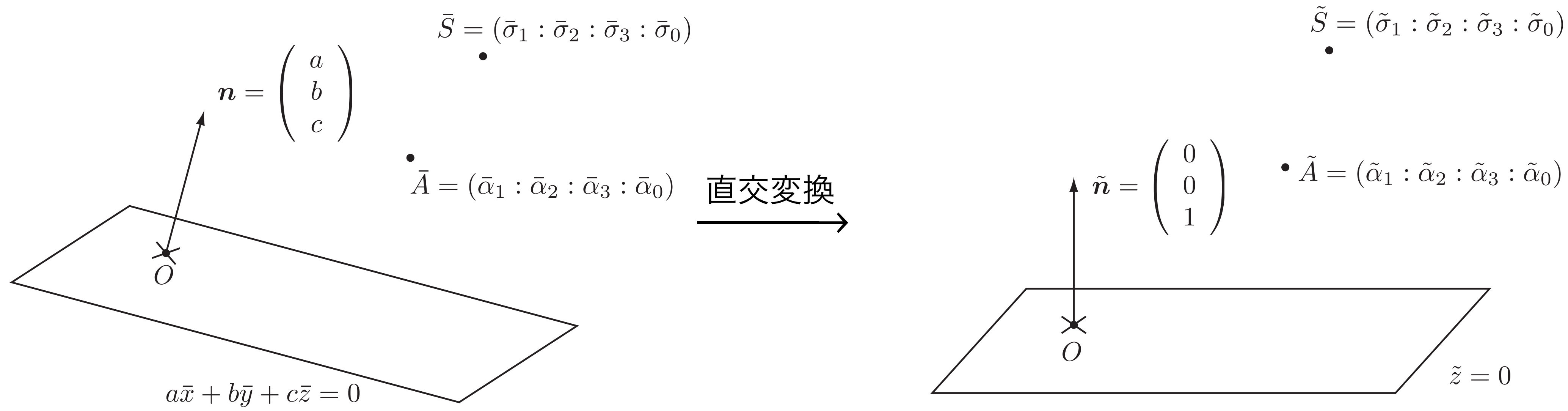
一般の平面への透視投影（同次座標系）



$\boxed{\text{手順 1}}$ 平面 $ax + by + cz = d$ が原点を通る平面 $a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = 0$ になるよう座標変換（平行移動）する；

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \bar{X}_0 \end{pmatrix}$$

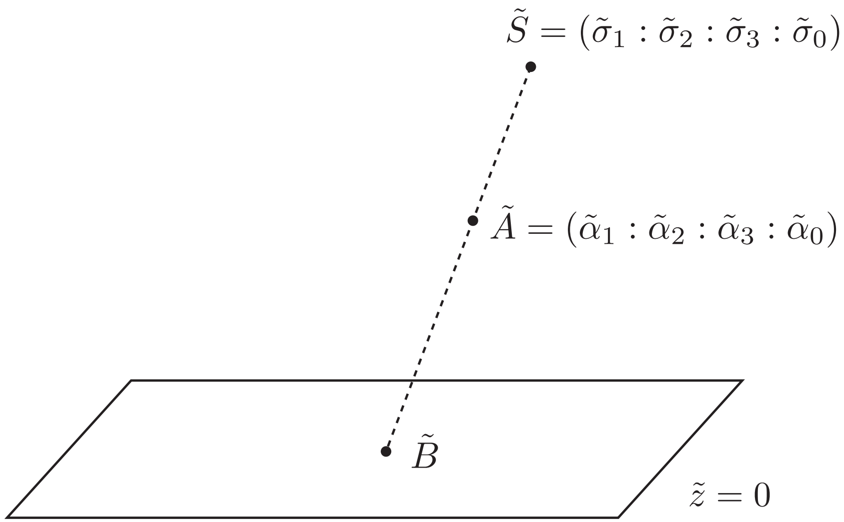
一般の平面への透視投影（同次座標系）



$\boxed{\text{手順 2}}$　ベクトル (a, b, c) が $(0, 0, 1)$（の定数倍）に移るような直交行列 P を用いて座標変換する；

$$
\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \bar{X}_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & 0 \\ & P & & 0 \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_0 \end{pmatrix}
$$

一般の平面への透視投影（同次座標系）

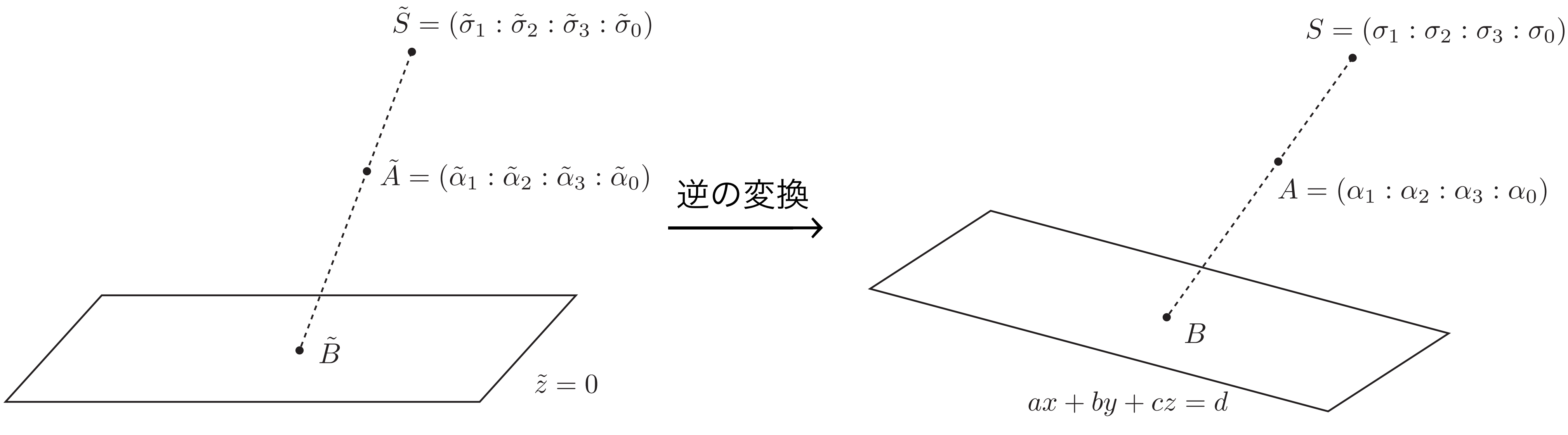


$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{手順 3}}$ $\tilde{z} = 0$ 平面への投影像 $\tilde{B}$ を求める．ただし，

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{pmatrix}, \qquad M = \left(\begin{array}{ccc:c} & & & v_1 \\ & P & & v_2 \\ & & & v_3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

一般の平面への透視投影（同次座標系）



$\boxed{\text{手順 4}}$ 逆の手順で座標変換して，投影像 B を求める．以上のことから，

$$B = M \begin{pmatrix} -\tilde{\sigma}_3 & 0 & \tilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\sigma}_3 & \tilde{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_0 & -\tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$