□ キーワード：透視投影，同次座標

(I) 直交座標系と同次座標系

$$\underset{\text{直交座標}}{(a_1, a_2, a_3)} \quad \longleftrightarrow \quad \underset{\text{同次座標}}{(t\,a_1 : t\,a_2 : t\,a_3 : t)}$$

(II) 同次座標系における透視投影

点 $A = (\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_0)$ の，視点を $S = (\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$ とする $z = 0$ への透視投影像は

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

例題 **6.1.** 視点を $S = (1, 2, 3)$，投影面を $z = 0$ とする透視投影を φ とする．以下の問に答えなさい．

(1) S を同次座標で表しなさい．

(2) 同次座標系において透視投影 φ を表す 4 次正方行列を書きなさい．

(3) $A = (-1, \frac{1}{2}, 1)$ を同次座標で表しなさい．

(4) 点 A を透視投影 φ で移した点 B を求めなさい（同次座標のままでよい）．

(5) B を直交座標に書き直しなさい．

解. (1) 同次座標系での表し方は一意的ではない．例えば (I) の変換式において $t = 1$ とする（つまり，第 4 の座標を 1 とする）と $S = \mathbf{(1 : 2 : 3 : 1)}$

(2) これも表し方は一意的ではない（S の同次座標の定め方に依存する）．(1) で定めた S の同次座標に対して，

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) (1) と同様．第 4 の座標を 1 としてもよいが，座標の値が整数の方が計算が簡単になるので，ここでは $A = ((-1) \times 2 : \frac{1}{2} \times 2 : 1 \times 2 : 2) = \mathbf{(-2 : 1 : 2 : 2)}$ とする．

(4) (II) より

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

したがって，投影像は $\boldsymbol{B = (8 : 1 : 0 : -4)}$.

(5) 同次座標から直交座標に直すには，第 4 の座標で他の座標の値を割れば良い．したがって，$B = (\frac{8}{(-4)}, \frac{1}{(-4)}, \frac{0}{(-4)}) = \boldsymbol{(-2, -\frac{1}{4}, 0)}$ [*1].

[*1] (1) から (4) までの解は同次座標の決め方に依るが，投影像の直交座標表示は一意的に決まる．