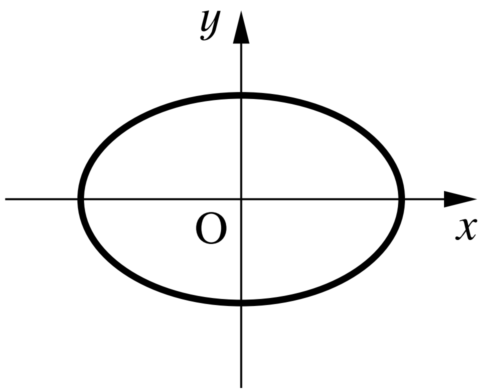
2 次曲線の分類

方程式

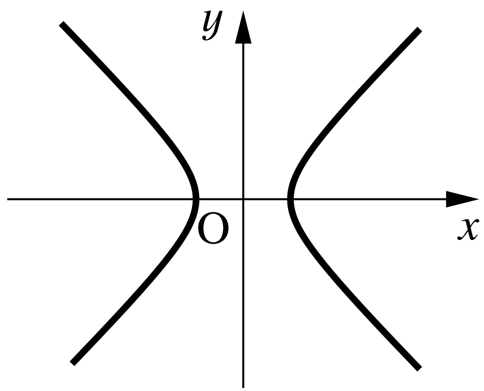
$$a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$$

が表す図形を 2 次曲線という（a, b, c, d, e, f は実数）．2 次曲線は適当な座標変換（直交変換と平行移動）により次のいずれかに分類される（標準形）；

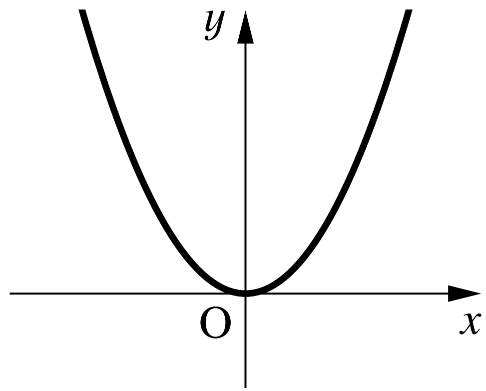
(1) 楕円：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



(2) 双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



(3) 放物線：$y = a\,x^2$



(4) 点：$(x, y) = (0, 0)$

$(\iff x^2 + y^2 = 0)$

(5) 直線：$y = \pm x$

$(\iff x^2 - y^2 = 0)$

または，$y = 0$

固有値，固有ベクトルと行列の対角化

A：2 次正方行列

k_1, k_2：A の固有値

$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$：対応する固有ベクトル（$A\boldsymbol{v}_i = k_i\boldsymbol{v}_i$）

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$：固有ベクトルを並べた行列（2 次正方行列）

$$
\begin{aligned}
AP &= A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_1\boldsymbol{v}_1 & k_2\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \text{行列の対角化}
$$

2 次式の標準化

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$\longrightarrow$ 行列表示： $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + dx + ey + f = 0$

定理

対称行列の固有値は実数であり， <u>直交行列で対角化可能</u>.

(<u>対称行列 A</u> に対して <u>${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P が存在</u> する)

直交行列 P が， ${}^tP\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix}$ を満たすとする.

この P に対して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると. . .

2 次式の標準化

$$a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$$

$\longrightarrow$ 行列表示： $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d\,x + e\,y + f = 0$

$\longrightarrow$ 座標変換： $\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \bar{d}\,\bar{x} + \bar{e}\,\bar{y} + f = 0$

$$\therefore \quad \bar{a}\,\bar{x}^2 + \bar{c}\,\bar{y}^2 + \bar{d}\,\bar{x} + \bar{e}\,\bar{y} + f = 0$$

$\longrightarrow$ 座標の平行移動により，標準形のいずれかに変形できる.

- <u>2 次の項の係数行列</u> の固有値が共に正または負 $\longrightarrow$ 楕円
- 固有値の符号が正と負 $\longrightarrow$ 双曲線
- 0 固有値をもつ $\longrightarrow$ 放物線