問題 5.1. 方程式 $16x^2+24xy+9y^2-y+1=0$ が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) 直交行列 $P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ と座標変換する．x,y を $\bar{x},\bar{y}$ の式で表しなさい．　$x=\frac{1}{5}(4\bar{x}-3\bar{y})$,　$y=\frac{1}{5}(3\bar{x}+4\bar{y})$

(2) 方程式を $\bar{x},\bar{y}$ 座標で表し，それがどのような図形か答えなさい．$25\bar{x}^2-\frac{3}{5}\bar{x}-\frac{4}{5}\bar{y}+1=0$．つまり，$\bar{y}=\frac{125}{4}\bar{x}^2-\frac{3}{4}\bar{x}+\frac{5}{4}$ であるので，これは放物線である．

問題 5.2. 方程式 $x^2+6xy+y^2-x-y=0$ が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) 直交行列 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$ と座標変換する．x,y を $\bar{x},\bar{y}$ の式で表しなさい．　$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x}+\bar{y})$,　$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{x}+\bar{y})$

(2) 方程式を $\bar{x},\bar{y}$ 座標で表しなさい．　$-2\bar{x}^2+4\bar{y}^2-\sqrt{2}\bar{y}=0$

(3) さらに $\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{8}\end{pmatrix}$ と座標変換する．(2) で求めた $\bar{x},\bar{y}$ の式を $\tilde{x},\tilde{y}$ で表し，それがどのような図形か答えなさい．
$-2\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2-\frac{1}{8}=0$．これは双曲線である．

問題 5.3. 点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐 $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ をある平面で切り，その切り口の形を調べたい．次のように座標変換するとき，(i) 円錐の方程式を $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ で表しなさい．さらに，(ii) $\bar{z}=0$ を代入し，$\bar{x},\bar{y}$ の方程式を導きだし，(iii) その方程式が表す図形が何か答えなさい．

(1) $x=\bar{x}$,　$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$

(i) $\bar{x}^2+\frac{1}{2}\bar{y}^2+\bar{y}+\sqrt{3}\bar{z}-\sqrt{3}\bar{y}\bar{z}-\frac{1}{2}\bar{z}^2=0$　(ii) $\bar{x}^2+\frac{1}{2}\bar{y}^2+\bar{y}=0$.　(iii) 楕円

(2) $x=\bar{x}$,　$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$

(i) $\bar{x}^2+\sqrt{2}\bar{y}-2\bar{y}\bar{z}+\sqrt{2}\bar{z}-1=0$　(ii) $\bar{x}^2+\sqrt{2}\bar{y}-1=0$.　(iii) 放物線

(3) $x=\bar{x}$,　$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}\\\bar{z}\end{pmatrix}$

(i) $\bar{x}^2-\bar{y}^2+2\bar{y}+\bar{z}^2-1=0$　(ii) $\bar{x}^2-\bar{y}^2+2\bar{y}-1=0$.　(iii) 双曲線