□ キーワード：座標変換

問題 5.1. 方程式

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - y + 1 = 0 \tag{5.1}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) 直交行列 $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．x, y を $\bar{x}, \bar{y}$ の式で表しなさい．

(2) (5.1) 式を $\bar{x}, \bar{y}$ 座標で表し，それがどのような図形か答えなさい．

問題 5.2. 方程式

$$x^2 + 6xy + y^2 - x - y = 0 \tag{5.2}$$

が表す図形がどのような形か知りたい．以下の問いに答えなさい．

(1) 直交行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．x, y を $\bar{x}, \bar{y}$ の式で表しなさい．

(2) (5.2) 式を $\bar{x}, \bar{y}$ 座標で表しなさい．

(3) さらに $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$ と座標変換する．(2) で求めた $\bar{x}, \bar{y}$ の式を $\tilde{x}, \tilde{y}$ で表し，それがどのような図形か答えなさい．

問題 5.3. 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐

$$x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \tag{5.3}$$

をある平面で切り，その切り口の形を調べたい．次のように座標変換するとき，(i) (5.3) を $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ で表しなさい．さらに，(ii) $\bar{z} = 0$ を代入し，$\bar{x}, \bar{y}$ の方程式を導きだし，(iii) その方程式が表す図形が何か答えなさい．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$

■ 問題 **5.1, 5.2** をより深く理解するためのヒント

2 次式の行列表示

2 次多項式 $a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$ は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0$$

と表すことができる．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ とおくと (5.4) は

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} + f = 0 \tag{5.4}$$

と書ける．

問題 5.4. 問題 5.1 について以下の問いに答えなさい．

(1) 方程式 (5.1) を (5.4) のように行列表示したときの行列 A を答えなさい[*1]．

(2) ベクトル $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであること示しなさい．さらにその固有値を求めなさい．

(3) ベクトル $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであること示しなさい．さらにその固有値を求めなさい．

(4) ^tPAP を計算しなさい．

問題 5.5. 問題 5.4 を参考にして，問題 5.2 の方程式 (5.2) についても同様の考察を加えなさい．

[*1] xy の係数に注意せよ