□ キーワード：転置，直交行列

■ 復習（行列の転置）

問題 **3.10.** 次の行列 A, B に対して，(i) ${}^tA$，(ii) ${}^tB$，(iii) AB，(iv) ${}^t(AB)$，(v) ${}^tB\,{}^tA$ を求めなさい[*1].

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 **3.11.** 次の問に答えなさい.

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し，ベクトルの長さ $|\boldsymbol{a}|^2$, $|\boldsymbol{b}|^2$, $|\boldsymbol{c}|^2$，および内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ を計算しなさい.

$$(a)\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b)\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 A に対し，行列の積 ${}^tA\,A$ を求めなさい.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) (1) で計算した値と，(2) で求めた行列の成分を比較し，

$${}^tA\,A = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}|^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & |\boldsymbol{b}|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & |\boldsymbol{c}|^2 \end{pmatrix}$$

が成り立っていることを確かめなさい.

[*1] 一般に ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つ.

■ 直交行列と直交変換

問題 3.12. 次の行列 A に対し，(i) ${}^tA\,A = A\,{}^tA = E_3$ が成り立つことを計算して確かめなさい．また (ii) A の行列式を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ac + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ac - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$

ただし，a, b, c は $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数．

問題 3.13. [*2] 行列

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^{*3}$$

が定める線形変換について，以下の問に答えなさい．

(1) T_θ が直交行列であることを確かめなさい．

(2) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に対し，線変換 T_θ による像 $T_\theta \boldsymbol{p}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(3) $\boldsymbol{p}$ と $T_\theta(\boldsymbol{p})$ の中点 $\boldsymbol{m}$ を X, Y, θ を用いて表しなさい．

(4) $\boldsymbol{m}$ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ 上の点であることを示しなさい．

(5) $\boldsymbol{p}$ と $T_\theta(\boldsymbol{p})$ を通る直線の傾きは $-\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ であることを示しなさい[*4]．

[*2] 発展問題．興味がある者は考えてみよ．

[*3] 回転変換を与える行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ との成分の符号の違いに注意せよ．

[*4] (4)(5) の結果から，T_θ は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称変換を与える（T_θ と問題 3.8(3) の行列とを比較せよ）．