問題 3.10. (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 11 & -1 & 7 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 10 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

問題 3.11. (a) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 30 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 13 & 13 & -4 \\ 13 & 27 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

問題 3.12 ((2) の行列について). a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ac + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ac - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

とおく．この行列が直交行列であることを示そう．ここで，

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

とおくと $A = \cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C$ となる．また，B は交代行列[*1]，C は対称行列[*2]であり，さらに

$$B^2 = C - E_3, \qquad BC = CB = O, \qquad C^2 = C$$

と満たす．以上の性質を使って，${}^tA\,A$ を計算すると

$$\begin{aligned}
{}^tAA &= {}^t(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C)(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
&= (\cos\theta\,{}^tE_3 + \sin\theta\,{}^tB + (1-\cos\theta)\,{}^tC)(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
&= (\cos\theta E_3 - \sin\theta B + (1-\cos\theta)C)(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
&= \cos^2\theta E_3 + \cos\theta\sin\theta B + \cos\theta(1-\cos\theta)C \\
&\quad - \sin\theta\cos\theta B - \sin^2\theta B^2 - \sin\theta(1-\cos\theta)BC \\
&\quad + \cos\theta(1-\cos\theta)C + (1-\cos\theta)\sin\theta CB + (1-\cos\theta)^2C^2 \\
&= \cos^2\theta E_3 + 2\cos\theta(1-\cos\theta)C - \sin^2\theta(C - E_3) + (1-\cos\theta)^2C \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)E_3 + \left\{2\cos\theta(1-\cos\theta) - \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2\right\}C = \underline{E_3}.
\end{aligned}$$

[*1] ${}^tB = -B$ が成り立つ．

[*2] ${}^tC = C$ が成り立つ．

行列式の値は $\underline{+1}$ になります[*3]

注意. 問題 3.12 の行列 A は，原点を通りベクトル (a,b,c) と平行な直線を回転軸とする回転変換を与える.

問題 3.13. 行列 $T_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ が定める線形変換について.

(1) 省略する.

(2) $T_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, X + \sin\theta\, Y \\ \sin\theta\, X - \cos\theta\, Y \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{m} = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{p} + T_\theta(\boldsymbol{p})\right) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\cos\theta)\, X + \sin\theta\, Y \\ \sin\theta\, X + (1-\cos\theta)\, Y \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{m}$ が直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right) x$ 上の点であるためには

$$\frac{\sin\theta\, X + (1-\cos\theta) Y}{(1+\cos\theta)\, X + \sin\theta\, Y} = \tan\frac{\theta}{2}$$

が成り立てばよい．実際，三角関数の半角の公式を使うと

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\theta\, X + (1-\cos\theta)\, Y}{(1+\cos\theta)\, X + \sin\theta\, Y} &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, X + \left\{1 - \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} Y}{\left\{1 + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} X + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, Y} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, X + \left\{\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\right\} Y}{\left\{\cos^2\frac{\theta}{2} + \left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right\} X + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, Y} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, X + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\, Y}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\, X + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, Y} \\
&= \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, X + \sin\frac{\theta}{2}\, Y\right)}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} X + \sin\frac{\theta}{2}\, Y\right)} = \tan\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

(5) $\boldsymbol{p}$ と $T_\theta(\boldsymbol{p})$ を通る直線の傾きが $-\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ であることの証明も (4) の計算とほとんど同様である（省略）.

[*3] サラスの公式を使ってもいいですが，私は余因子展開の方法を使って計算しました.