□ キーワード：固有多項式，固有値，固有ベクトル

固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し，

$$Av = kv$$

を満たす数 k を $\boldsymbol{A}$ の固有値，$\boldsymbol{v}\,(\neq \mathbf{0})$ を固有値 $\boldsymbol{k}$ に関する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとよぶ．

- 固有ベクトルは連立方程式 $(kE_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解である．
- 固有値は $\det(kE_n - A) = 0$ を満たす数である．

固有値，固有ベクトルの求め方

(1) $\Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$ を計算する．
(2) $\Phi_A(t) = 0$ の解 $t = k$ を求める（この解が A の固有値）．
(3) (2) で求めた各 k に対し，連立方程式 $(kE_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解を求める（この解が A の固有値 k に関する固有ベクトル）．

問題 4.1. 行列の $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) $\Phi_A(t) = \det(t\,E_2 - A)$ を求めなさい．
(2) 2 次方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 k を求めなさい．
(3) 各 k に対し，連立方程式 $(kE_2 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{v}_k$ を求めなさい．
(4) 各 k に対し，$A\boldsymbol{v}_k = k\boldsymbol{v}_k$ が成り立つことを確かめなさい．

問題 4.2. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$