情報数学 III 第 4 回小テスト解答

2009.10.26（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　1 次独立か 1 次従属か判定しなさい（各 10 点）

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\det A = -3\,(\neq 0)$，または $\mathrm{rank}A = 2$ であるから，$\underline{\text{線形独立}}$ である（$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行ではないから）．

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det A = 0$，または $\mathrm{rank}A = 2\,(<3)$ であるから，$\underline{\text{線形従属}}$ である（実際に $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ である）．

$\boxed{\mathbf{2}}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f，行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ が定める線形変換を g とする．平面上の点 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) $f(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(2) $g(f(\boldsymbol{p})) = Bf(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}$

(3) $g(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}$ を満たす点 $\boldsymbol{q}$ を求めなさい．

$g(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}$ より, $B\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$. つまり, $\boldsymbol{q} = B^{-1}\boldsymbol{p} = \dfrac{1}{3\times(-1)-(-1)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f とする（f は直線 $y = x$ に関する対称変換である）．また，$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問に答えなさい．（各 10 点）

(1) $f(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

(2) $\boldsymbol{p}$ と $f(\boldsymbol{p})$ を結ぶ線分の中点が直線 $y=x$ 上にあることを示しなさい．

$\boldsymbol{p}$ と $f(\boldsymbol{p})$ の中点は $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}))=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

$x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ は $y=x$ を満たすので，これは直線 $y=x$ 上の点である．

(3) $f(f(\boldsymbol{p}))$ を求めなさい．

$f(f(\boldsymbol{p}))=A(A\boldsymbol{p})=A^2(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$.（直線に関する対称変換を 2 回施すと常に元の点に戻る）

(4) $f(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}$ となる点 $\boldsymbol{q}$ をひとつ答えなさい（ただし，零ベクトル $\mathbf{0}$ 以外で）．

$\boxed{2}$ (3) と同様にして，逆行列を求めてもよいが，対称変換の定義から直線 $y=x$ 上のすべての点はこの対称変換により不変である．よって，$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}$ は $f(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}$ を満たす（k は 0 でない実数)．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ とする．$f(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}$ となる線形変換 f（を与える行列 A）をひとつ答えなさい．(10 点)

求める線形変換を与える行列を $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおく．仮定から

$$f(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}\iff\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b\\c+2d\end{pmatrix}$$

つまり，方程式

$$\begin{cases}a+2b=2\\c+2d=-1\end{cases}$$

満たすように a,b,c,d を定めればよい（このような行列 A はたくさんある)．例えば，$a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=-1$.