□ キーワード：相似変換，回転，対称変換，合成，逆変換

問題 3.4. 次の各行列が定める平面 $\mathbf{R}^2$ の線形変換はどのような変換か.

(1) 単位行列 $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 単位行列の実数倍 $kE_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(3) $S_{x(k)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $S_{y(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(5) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

直線 l に関する対称変換

点 P に対し，以下のように点 $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{l}$ を定める；

- 点 P を通り，l と直交する直線を $l_{\mathrm{P}}^{\perp}$ とする.
- l と $l_{\mathrm{P}}^{\perp}$ の交点を $\mathrm{Q}_{\mathrm{P}}^{l}$ とする.
- $l_{\mathrm{P}}^{\perp}$ 上の点 $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{l}$ を「$\mathrm{Q}_{\mathrm{P}}^{l}$ が P と $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{l}$ の中点」となるように定める.

点 P に対し，上で定まる点 $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}^{l}$ を対応させる変換を直線 l に関する対称変換とよぶ.
l が原点を通る直線のとき，l に関する対称変換は線形変換である（つまり，行列の積で表すことができる）.

問題 3.5. 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f とし，点 $\mathrm{P} = (-1, 3)$ とする.
このとき，以下の問に答えなさい.

(1) $f(\mathrm{P})$ の座標を答えなさい.

(2) P と $f(\mathrm{P})$ の中点[*1]が直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ 上にあることを示しなさい.

[*1] 点（位置ベクトル）$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の中点は $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})$ である.

(3) 2 点 P，$f(\mathrm{P})$ を結ぶ直線が直線 $y=-\dfrac{1}{2}x$ と直交することを示しなさい[*2].

問題 3.6. 直線 $l\ :\ y=2x$ に関する対称変換を f とし，点 $\mathrm{P}=(-1,8)$ とする．以下の手順で点 P の f による像 $f(\mathrm{P})$ を求めなさい.

(1) 点 P を通り，l に直交する直線 $l^{\perp}$ の方程式を求めなさい.
(2) l と $l^{\perp}$ の交点 Q の交点の座標を求めなさい.
(3) Q が P と R の中点となるような $l^{\perp}$ 上の点 R を求めなさい.

問題 3.7. 直線 $l\ :\ y=x$ に関する対称変換を表す行列を求めたい．以下の問に答えなさい.

(1) 点 $\mathrm{P}=(a,b)$ を通り，l に直交する直線 $l^{\perp}$ の方程式を求めなさい.
(2) l と $l^{\perp}$ の交点 Q の交点の座標を求めなさい.
(3) Q が P と R の中点となるような $l^{\perp}$ 上の点 R を求めなさい.
(4) R の座標を $(x(a,b),y(a,b))$ とおく．このとき

$$\begin{pmatrix} x(a,b) \\ y(a,b) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となる行列 A を求めなさい.

問題 3.8. 線形変換の合成について，以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $S_{x(k)}$ が定める線形変換を f，$S_{y(k)}$ が定める線形変換を g とおくとき，$f\circ g=g\circ f=k\,\mathrm{id}$ であることを示しなさい.
(2) 行列 R_θ が定める線形変換を f_θ とおくと，$f_\theta\circ f_\phi=f_{\theta+\phi}$ であることを示しなさい.
(3) 行列 $\dfrac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} -(k^2-1) & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f とおくとき[*3]，$f\circ f=\mathrm{id}$ であることを示しなさい.

問題 3.9. 次の行列 A が定める線形変換の逆変換を求めなさい.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

[*2] P と $f(\mathrm{P})$ を結ぶ直線の傾きが 2 であることを示しなさい
[*3] これは直線 $y=kx$ に関する対称変換である.