

例として、直線 $l : y = x + 1$ を行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ によって決まる線形変換 f で変換してみましょう。

(1) l 上の点を媒介変数表示する

l の定義式より $x = t$ のとき $y = t + 1$ であるから、 l 上の点は媒介変数 t を用いて $\begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix}$ と表すことができます。

(2) 線形変換で移す

この点は f により

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

に移ります。さて、 t を動かしたとき、 $\begin{pmatrix} 3t + 2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$ はどのような図形の上を動くでしょうか。これはある図形を媒介変数 t で表したものと考えられます。したがって、この図形を知るためには直線 l の式から媒介変数表示を作ったことと逆のことをすればいいのです。

(3) 媒介変数表示から関数表示へ

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + 2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$ とおきます ($X = 3t + 2$, $Y = t - 1$)。この2式から t を消去すると $X - 3Y = 5$ となります。これは t を動かしたとき、点 $\begin{pmatrix} 3t + 2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$ は方程式 $x - 3y = 5$ が表す直線上を動くことを意味します。

以上のことから、直線 $y = x + 1$ は f により直線 $x - 3y = 5$ に移る ことがわかります。