問題 3.1. 次の各行列が定める平面 $\mathbf{R}^2$ の線形変換による点 $(1, 2)$ の像（点）を座標平面に図示しなさい． （図は省略）$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (4) $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $S\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (6) $T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $T\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}$ [*1]

問題 3.2. 次の各直線を行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ で線形変換したとき，どのような図形に変換されるか調べなさい

(1) 点 $(2, 3)$ を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{v} = (-1, 2)$ の直線（この直線は $2x + y = 7$）．直線 $4x + 3y = -7$ に移る．

(2) 直線 $y = 3x - 4$． 直線 $11x + 7y = -4$ に移る．

問題 3.3. 次の各直線を行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ で線形変換したとき，どのような図形に変換されるか調べなさい．

(1) 点 $(-2, -4)$ を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{v} = (1, 2)$ の直線（この直線は $y = 2x$）．直線 $y = 2x$ に移る（つまり，この線形変換は直線 $y = 2x$ を不変にする）．

(2) 2 点 $(2, 1)$ と $(6, 3)$ を通る直線． 原点 $(0, 0)$ に移る（直線が点につぶれてしまう）．

問題 3.4. 次の各行列が定める平面 $\mathbf{R}^2$ の線形変換はどのような変換か．

(1) 単位行列 $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 恒等変換

(2) $kE_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 相似拡大（$k > 1$ のとき）または相似縮小（$0 < k < 1$ のとき）．

[*1] $\boldsymbol{p}$ は行列 T の固有ベクトルである（固有値は 2）．

(3) $S_{x(k)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ x 軸方向への拡大または縮小

(4) $S_{y(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ x 軸方向への拡大または縮小

(5) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 原点を中心とする回転（回転角は反時計回りに θ）

問題 3.5. 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f とし，点 $\mathrm{P} = (-1, 3)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) $f(\mathrm{P})$ の座標を答えなさい． $(-3, -1)$

(2) P と $f(\mathrm{P})$ の中点が直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ 上にあることを示しなさい． 中点は $(-2, 1)$

(3) 2 点 P，$f(\mathrm{P})$ を結ぶ直線が直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ と直交することを示しなさい．

P と $f(\mathrm{P})$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{3-(-1)}{-1-(-3)} = 2$ なので，$y = -\frac{1}{2}x$ と直交する．

問題 3.6. 直線 $l : y = 2x$ に関する対称変換を f とし，点 $\mathrm{P} = (-1, 8)$ とする．以下の手順で点 P の f による像 $f(\mathrm{P})$ を求めなさい．

(1) 点 P を通り，l に直交する直線 $l^\perp$ の方程式を求めなさい． $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$

(2) l と $l^\perp$ の交点 Q の交点の座標を求めなさい． $(3, 6)$

(3) Q が P と R の中点となるような $l^\perp$ 上の点 R を求めなさい． $(7, 4)$

問題 3.7. 直線 $l : y = x$ に関する対称変換を表す行列を求めたい．以下の問に答えなさい．

(1) 点 $\mathrm{P} = (a, b)$ を通り，l に直交する直線 $l^\perp$ の方程式を求めなさい． $y = -x + a + b$

(2) l と $l^\perp$ の交点 Q の交点の座標を求めなさい． $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$

(3) Q が P と R の中点となるような $l^\perp$ 上の点 R を求めなさい． (b, a)

(4) R の座標を $(x(a,b), y(a,b))$ とおく．このとき $\begin{pmatrix} x(a,b) \\ y(a,b) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい． $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となるのは $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 **3.8.** 線形変換の合成について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $S_{x(k)}$ が定める線形変換を f，$S_{y(k)}$ が定める線形変換を g とおくとき，$f \circ g = g \circ f = k\,\mathrm{id}$ であることを示しなさい．
$S_{x(k)}S_{y(k)} = S_{y(k)}S_{x(k)} = kE_2$ であることを計算すればよい．

(2) 行列 R_θ が定める線形変換を f_θ とおくと，$f_\theta \circ f_\phi = f_{\theta+\phi}$ であることを示しなさい．$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ であることを計算すればよい（三角関数の加法定理を使う）．

(3) 行列 $\dfrac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} -(k^2-1) & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$ が定める線形変換を f とおくとき，$f \circ f = \mathrm{id}$ であることを示しなさい．この行列の二乗が E_2 に等しいことを確かめよ．ちなみに，この行列は直線 $y = kx$ に関する対称変換を与える行列である．
例題．$k = 2$ のとき上の行列は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

である．この線形変換（行列）で点 $(-1, 8)$ を写像すると

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 35 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる（問題 3.6）．

問題 **3.9.** 次の行列 A が定める線形変換の逆変換を求めなさい．
A が定める線形変換の逆変換は，A の逆行列 A^{-1} が定める線形変換に他ならない．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ この行列の逆行列は存在しない．