1 次独立と 1 次従属 — 3 つの空間ベクトル

零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属

$\iff$ $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ を満たす実数 c_1, c_2, c_3（ただし，すべて 0 でない）が存在する．（仮に $c_3 \neq 0$ とすると...）

$\iff$ $\boldsymbol{a}_3 = b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2$

$\iff$ ベクトル $\boldsymbol{a}_3$ はベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が生成する平面上にのっている．

零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立

$\iff$ どのベクトルも他の 2 つのベクトルが生成する平面にはのらない．

例題（判定法）

$\boxed{\text{例題}}$ 次の 3 つのベクトルが 1 次独立か 1 次従属か判定しなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{方針}}$ $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たす実数 c_1, c_2, c_3 を求める.

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ の解を求める.

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 &= x\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 2x - 2z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例題（判定法）

$\Longleftrightarrow$ 次の方程式の解は？

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A\boldsymbol{x} = \mathbf{0})$$

- 1 次独立

  $\Longleftrightarrow$ 自明な解（$x = y = z = 0$）しか持たない.

  $\Longleftrightarrow$ 行列 A の階数が 3 （= ベクトルの数，行列の列の数）.

  $\Longleftrightarrow$ 行列 A の行列式が 0 でない.

  $\Longleftrightarrow$ 行列 A は正則行列，つまり A の逆行列が存在する.

- 1 次従属

  $\Longleftrightarrow$ 非自明な解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}A < 3$ $\Longleftrightarrow$ $\cdots\cdots$

例題（判定法）

- 3 個以上の平面ベクトル達はいつも 1 次従属.
- 4 個以上の空間ベクトル達はいつも 1 次従属.

$$\vdots$$

以上を参考にして，問題 1.10 をやってみよ.

$\boxed{\text{問題 1.10 の解}}$

(1) 1 次従属　(2) 1 次独立

(3) 1 次従属　(4) 1 次独立

(5) 1 次従属