□ キーワード：1 次独立，1 次従属

以下では，ベクトルの成分を縦に並べて記述する．m 個の成分を持つベクトルを $\boldsymbol{m}$ 項数ベクトルとよぶ（平面ベクトルは 2 項数ベクトル，空間ベクトルは 3 項数ベクトル）．

1 次独立の同値条件

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

を m 項数ベクトルとする．また，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を並べてできる (m, n) 行列を A とおく；

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このとき，

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$が <u>**1** 次独立</u>

$\Longleftrightarrow$ $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$

を満たす実数は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみ

$\Longleftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} = 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n} = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn} = 0 \end{cases}$

の解は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ のみ．

（つまり，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明解を持たない）

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$

（$m = n$ のとき）

$\Longleftrightarrow$ A は正則（つまり，A の逆行列 A^{-1} が存在する）

$\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

問題 1.10. 次のベクトルが 1 次従属か 1 次独立か調べなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$