□ キーワード：ベクトル方程式，平面，法線ベクトル

問題 2.4. 次の点 P_0 を通り，法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ の平面の方程式を求めなさい．

(1) $\mathrm{P}_0 = (2, 1, 2)$, $\boldsymbol{n} = (2, -1, 1)$
(2) $\mathrm{P}_0 = (2, -2, 2)$, $\boldsymbol{n} = (-2, 3, 5)$
(3) $\mathrm{P}_0 = (2, -1, 1)$, $\boldsymbol{n} = (1, 1, -3)$

3 点を通る平面の方程式の求め方

3 点を A, B, C とする．

(1) $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求める．
(2) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ を計算する．これが求める平面の法線ベクトルである．

問題 2.5. 次の 3 点を通る平面の方程式を求めなさい．

(1) $(-1, -4, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 4)$
(2) $(-1, 1, -1)$, $(2, -2, 2)$, $(0, -5, 3)$
(3) $(3, -2, 1)$, $(2, -1, 1)$, $(1, 3, 2)$

平面の媒介変数表示

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \quad (t,\ s \text{ は実数})$$

- t, s を動かすと，$\boldsymbol{p}$ はある平面上を動く．
- その平面は点 $\boldsymbol{p}_0$ を通る（$t = s = 0$ のとき）
- $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ はその平面の法線ベクトルである（$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$ であるから，$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0$ は $\boldsymbol{u}$ とも $\boldsymbol{v}$ とも直交する）．
- $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ とおくと，x, y, z は t と s の関数となる．

問題 2.6. 問題 2.5 の各問に対し，(i) 3 点を適当に $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ とおいて，$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}, \boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を計算しなさい．(ii) 3 点から 1 点を選び，その点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_0$ とする．さらに，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ とおくとき，x, y, z を t と s を用いて表しなさい．(iii) (ii) で求めた 3 つの方程式から t と s を消去し，x, y, z の関係式を求めなさい．