問題 1.4. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の (i) 長さ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|$, (ii) 内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ および (iii) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい.

(1) $\boldsymbol{u} = (1, \sqrt{3}),\ \boldsymbol{v} = (-2, 2\sqrt{3})$
$|\boldsymbol{u}| = 2,\ |\boldsymbol{v}| = 4,\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 4,\ \cos\theta = \frac{1}{2}\ (\theta = \frac{\pi}{3})$

(2) $\boldsymbol{a} = (5, 3),\ \boldsymbol{b} = (2, 0)$ に対し，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = (1, 3),\ \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{b} = (9, -3)$
$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{10},\ |\boldsymbol{v}| = 3\sqrt{10},\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0,\ \cos\theta = 0\ (\theta = \frac{\pi}{2})$

(3) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$ に対し，$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (3, 1, -1),\ \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (-5, 1, -5)$
$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{11},\ |\boldsymbol{v}| = \sqrt{51},\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -9,\ \cos\theta = -\frac{9}{\sqrt{561}}$

問題 1.5. 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算しなさい．また，内積 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ および $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算しなさい．$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する．

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1, -5, -2)$

(2) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 3)$ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-3, -3, 1)$

問題 1.6. $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 1),\ \boldsymbol{c} = (3, 1, -2)$ に対し，次を計算しなさい．
ベクトルの外積は結合律を満たさない（つまり，(1) と (2) の計算結果は一般には異なる)．
また，(1) 式と (3) 式は常に等しい．

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (-11, -2, 5)$

(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (-5, -5, -10)$

(3) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (-11, -2, 5)$

問題 1.7. 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，長さが 1 のベクトルを求めなさい．

(1) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 0)$
$$\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$$

(2) $\boldsymbol{a} = (3, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, 2, 2)$
$$\pm\frac{1}{65}(-2, -5, 6)$$

問題 1.8. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$ に等しい

ことを示しなさい.

$$
\begin{aligned}
S =&\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta \\
=&\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
=&\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2} \\
=&\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}
\end{aligned}
$$

問題 1.9. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積が，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積の長さ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ に等しいことを示せ.

問題 **1.8** より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ に等しい (三角形の面積の 2 倍)．$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と成分表示すると，

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \\
=&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
=&a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2 \\
&-(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_2b_2a_3b_3+2a_1b_1a_3b_3) \\
=&a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2 \\
&-2a_1b_1a_2b_2-2a_2b_2a_3b_3-2a_1b_1a_3b_3 \\
=&(a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2)+(a_2^2b_3^2-2a_2b_2a_3b_3+a_3^2b_2^2) \\
&+(a_1^2b_3^2-2a_1b_1a_3b_3+a_3^2b_1^2) \\
=&(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2 \\
=&|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2.
\end{aligned}
$$