□ キーワード：内積，ベクトルのなす角，空間ベクトルの外積

問題 1.4. 次のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の (i) 長さ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|$，(ii) 内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ および (iii) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $(\cos\theta)$ の値を求めなさい．

(1) $\boldsymbol{u} = (1, \sqrt{3}),\ \boldsymbol{v} = (-2, 2\sqrt{3})$
(2) $\boldsymbol{a} = (5, 3),\ \boldsymbol{b} = (2, 0)$ に対し，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a} + 7\boldsymbol{b}$
(3) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$ に対し，$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

問題 1.5. 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算しなさい．また，内積 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ および $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算しなさい．

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$
(2) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 3)$

問題 1.6. $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 1),\ \boldsymbol{c} = (3, 1, -2)$ に対し，次を計算しなさい．

(1) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$
(3) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

問題 1.7. 次の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，長さが 1 のベクトルを求めなさい．

(1) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1),\ \boldsymbol{b} = (2, -1, 0)$
(2) $\boldsymbol{a} = (3, 0, 1),\ \boldsymbol{b} = (1, 2, 2)$

問題 1.8. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする三角形の面積が $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$ に等しいことを示しなさい．[*1]

問題 1.9. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積が，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積の長さ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ に等しいことを示せ．[*2]

[*1] $\triangle$OAB の面積が $\frac{1}{2}$(OA の長さ) $\times$ (OB の長さ) $\times \sin\theta$ であること（ただし $\theta = \angle\mathrm{AOB}$），内積の性質 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて示せ．

[*2] 問題 **1.8** より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$ に等しい（三角形の面積の 2 倍）．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を成分表示し，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ と $|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ が等しいことを示せ．