□ キーワード：極限，関数の微分，微分係数，導関数（教科書 p.117–132）

問題 6.1. 次の関数 $f(x)$ に対して，(i) $f(2)$，(ii) $f(h)$，(iii) $f(-x)$，(iv) $f(x+h)$ を計算しなさい．

(1) $f(x) = 2x + 3$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$

問題 6.2. 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 4)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t^3 - 1}{t - 1}$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h^3 + 2h^2 - h}{h}$

問題 6.3. 次の関数 $f(x)$ と実数 a に対し，$x = a$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ を定義にしたがって計算しなさい．

(1) $f(x) = x^2 - x + 3,\ a = 2$

(2) $f(x) = -3x + 2,\ a = 1$

(3) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1,\ a = -1$

問題 6.4. 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって計算しなさい．

(1) $f(x) = x^2 + 1$

(2) $f(x) = 2x - 4$

(3) $f(x) = x^3 - 2x + 3$

例題 **6.1.** $f(x)=\sqrt{x}$ の導関数を求めなさい.

解. 導関数の定義より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

このまま極限をとると $\frac{0}{0}$ になってしまう．そこで，次のようにして「分子の有理化」を行う；$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ の分子と分母に $\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)$ をかけると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h\left((\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{h}{h\left((\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}.\end{aligned}$$

ここで $h\to 0$ とすると

$$\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\to\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

したがって，$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である.

問題 **6.5.** [*1] $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ の導関数を求めなさい.

[*1] 発展問題