□ キーワード：三角関数 (正弦, 余弦, 正接), 三角関数のグラフ, 正弦波 (教科書 p.78–83)

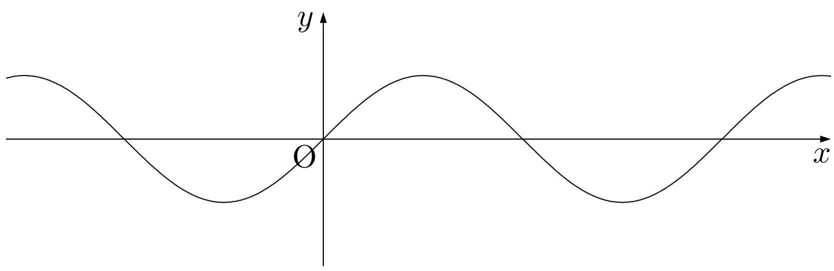
■ $\boldsymbol{y = \sin x}$, $\boldsymbol{y = \cos x}$ のグラフ

正弦 $\sin x$ の性質

$\sin x$ の値は角度 x の変化にともなって単位円周上を反時計回りに運動する点 P の縦軸の座標の値である.

- x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき，$\sin x$ の値は増加（0 から 1 へ）
- x が $\frac{\pi}{2}$ から π まで動くとき，$\sin x$ の値は減少（1 から 0 へ）
- x が π から $\frac{3\pi}{2}$ まで動くとき，$\sin x$ の値は減少（0 から -1 へ）
- x が $\frac{3\pi}{2}$ から 2π まで動くとき，$\sin x$ の値は増加（-1 から 0 へ）
  以後，この増減を繰り返す（$\sin x$ は周期 2π の周期関数）.
- $-1 \leq \sin x \leq 1$

上のことから，$y = \sin x$ のグラフは以下のようになることがわかる.



問題 **4.8.** $y = \sin x$ と x 軸との交点の座標と $\sin x = \pm 1$ となるときの x の座標を求め，上のグラフに書き加えなさい.

問題 **4.9.** $y = \cos x$ についても上と同様に性質を明らかにし，グラフの概形を描け.

問題 **4.10.** $f(x) = \sin(2x)$ について次の問いに答えよ.

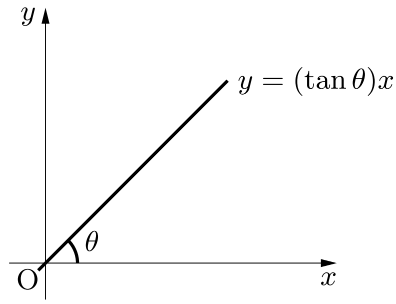
(1) $f(x) = 0$ を満たす x を求めよ.
(2) $f(x) = 1$ を満たす x を求めよ.
(3) $f(x) = -1$ を満たす x を求めよ.
(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

この授業に関する情報
http://www.math.sie.dendai.ac.jp/hiroyasu/2009/bmre.html

■ $\boldsymbol{y = \tan x}$ のグラフ

正接の幾何学的意味 (1)

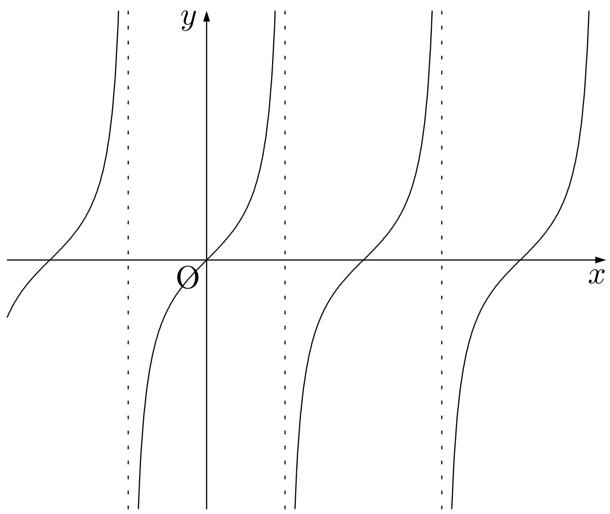
原点を通る直線 $y = ax$ と x 軸の正の部分とのなす角が θ のとき，$\tan\theta$ はこの直線の傾き a である．



正接 $\tan x$ の性質

- $\tan x$ の値は角度 x の変化にともなって単位円周上を反時計回りに運動する点 P と原点 O を通る直線の傾きに等しい．
- x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき，$\tan x$ の値は 0 から増加していく．x が $\frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて $\tan x$ の値はいくらでも大きくなる（$+\infty$ に発散する）．
- $\tan\frac{\pi}{2}$ の値は定まらない（定義できない）．
- 逆に x を 0 から $-\frac{\pi}{2}$ へ減少させたとき，$\tan x$ の値も減少していく．
- $\tan x$ は周期が π の周期関数である．

以上を参考にすると，$y = \tan x$ のグラフは次のようになると考えられる．

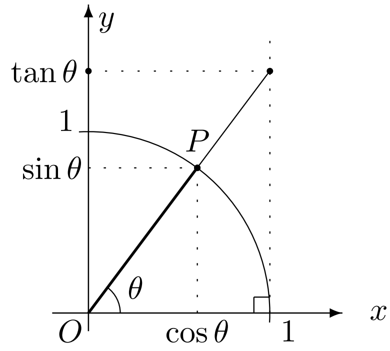


問題 4.11. $y = \tan x$ と x 軸との交点の座標を求めなさい．また，$\tan x$ の値が定義できない x の値（x 軸と破線の交点の x 座標）を求めなさい．

正接の幾何学的意味 (2)

正接：$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

正接の定義から，$\tan\theta$ は直線 OP と直線 $x=1$ との交点の y 座標と解釈できる．

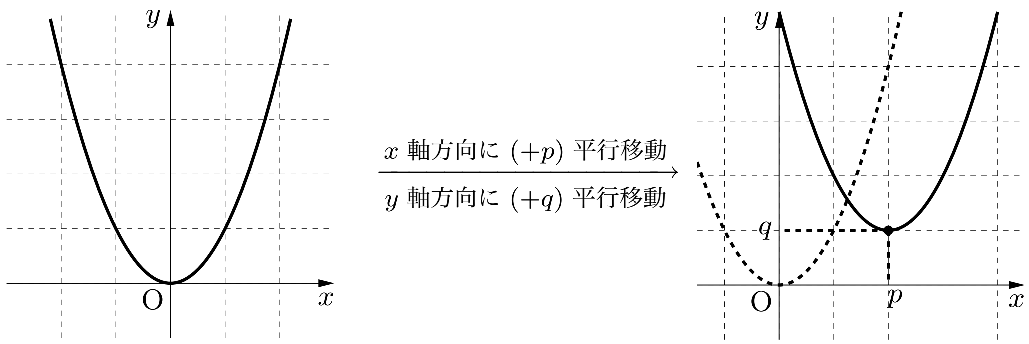


■ 関数のグラフに関する補足

グラフの平行移動

$f(x)$ を実数上の関数とする．$y = f(x-p)+q$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $+p$，y 軸方向に $+q$ 平行移動したものとなる（グラフの形は変わらない．位置が異なる）．

$y = ax^2$　　　　$y = a(x-p)^2 + q$



$(a > 0$ の場合$)$　　　　$(p, q > 0$ の場合$)$

■ 発展問題

倍角，3 倍角の公式

- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin(3\theta) = \sin\theta - 4\sin^3\theta$
- $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

問題 4.12. 加法定理を使って，倍角，3 倍角の公式を導きだしなさい．

問題 4.13. i を虚数単位とする（$i^2 = -1$）．以下の問に答えなさい．

(1) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ を展開し，$a + bi$ の形に書き直しなさい．また，a, b と倍角の公式の右辺を比較しなさい．

(2) $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ を展開し，$a + bi$ の形に書き直しなさい．また，a, b と 3 倍角の公式の右辺を比較しなさい．

正接の加法定理

(1) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha - \beta) =$

問題 4.14. 正弦，余弦の加法定理を用いて，正接の加法定理の公式を導き出しなさい．

和積公式

(1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(2) $\sin A - \sin B =$

(3) $\cos A - \cos B =$

(4) $\cos A + \cos B =$

積和公式

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right\}$

(2) $\sin\alpha\sin\beta =$

(3) $\cos\alpha\cos\beta =$

問題 4.15. 教科書 p.85 を参考にして，上の和積公式，積和公式を完成させよ（加法定理を用いて公式を導き出しなさい）．