問題 3.1. 次の 2 次多項式を $a(x-p)^2+q$ の形に変形しなさい.

(1) $f(x)=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$

(2) $f(x)=2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$

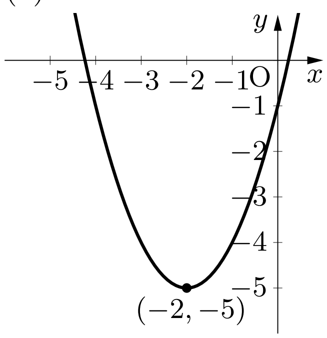
(3) $f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$

(4) $f(x)=3x^2+4x-1=3(x+\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3}$

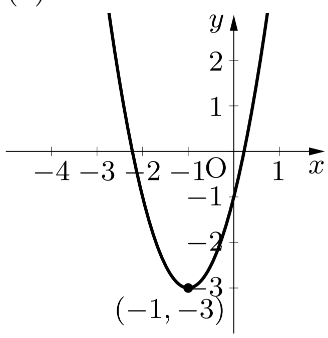
(5) $f(x)=-3x^2+4x-1=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$

問題 3.2. 問題 3.1 の関数 $f(x)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを xy-平面に描きなさい（頂点の座標，y 軸との交点の座標を明記すること）.

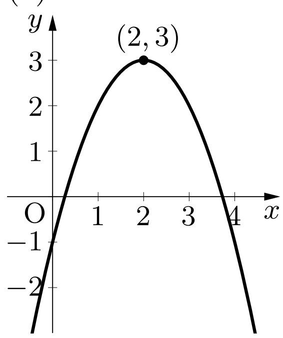
(1)



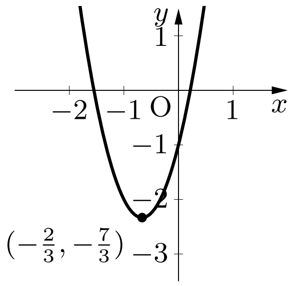
(2)



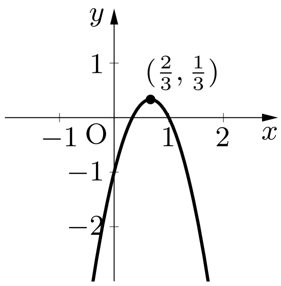
(3)



(4)

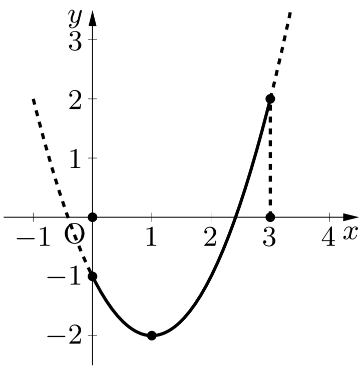


(5)



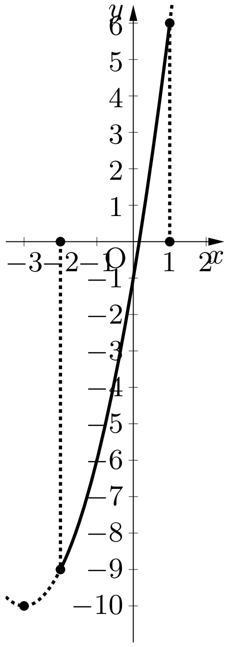
問題 3.3. 次の式のグラフを与えられた範囲で描きなさい．また，その範囲における y の最大値と最小値を求めなさい．

(1) $y = x^2 - 2x - 1$
$(0 \leq x \leq 3)$



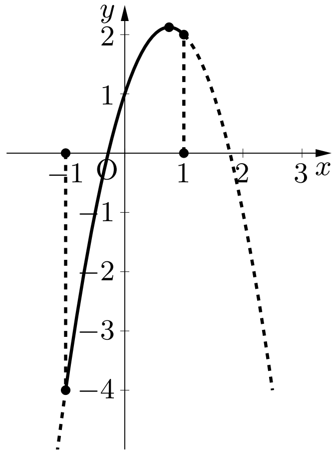
最大値は 2（$x = 3$）
最小値は -2（$x = 1$）

(2) $y = x^2 + 6x - 1$
$(-2 \leq x \leq 1)$



最大値は 6（$x = 1$）
最小値は -9（$x = -2$）

(3) $y = -2x^2 + 3x + 1$
$(-1 \leq x \leq 1)$



最大値は $\frac{17}{8}$（$x = \frac{3}{4}$）
最小値は -4（$x = -1$）

問題 3.4. 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$ の最小値が 0 であるための k の条件を求めなさい．

平方完成すると $f(x) = (x-k)^2 - k^2 + k + 2$ であるから，$y = f(x)$ のグラフは下に凸である．したがって，$f(x)$ の最小値は $-k^2 + k + 2 = -(k-2)(k+1)$．これが 0 になるのは $\underline{k = 2 \text{ または } k = -1}$ のときである．

問題 3.5. 次の 2 次方程式の解を求めなさい．

(1)(2) 2, -3 (3) -2, 3 (4) -2, $-\frac{1}{2}$

(5)(6) $(x-2)^2 - 3 = (x-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$ より $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(7) 解の公式より $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$

(8) 解の公式より $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{6}$．つまり，$x = -2,\ \frac{2}{3}$

問題 3.6. 次の不等式が満たす x の範囲を数直線上に図示しなさい． （図は省略）

(1) $x > 4$

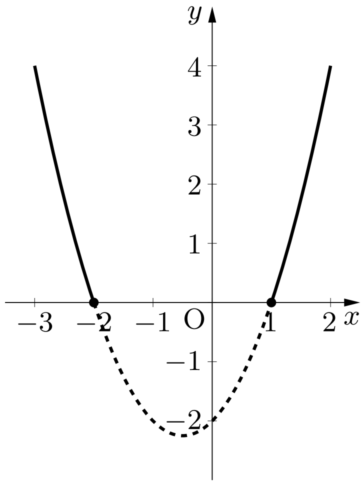
(2) $2x - 3 < 7 \iff x < 5$

(3) $1 - 4x \leq -11 \iff x \geq 3$

問題 3.7. 関数 $f(x) = x^2 + x - 2$ に対して，次の問に答えなさい．

(1) $y = f(x)$ のグラフ（放物線）を描きなさい．
$f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$．頂点は $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$，$y$ 軸との交点は $(0, -2)$．下に凸のグラフ．

(2) (1) で描いた放物線で，$y > 0$ を満たす部分を太線にしなさい．



(3) $f(x) = 0$ の解を求めなさい． $f(x) = (x + 2)(x - 1)$ より，$\underline{x = 1,\ -2}$

(4) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めなさい． $\underline{x < -2,\ 1 < x}$

問題 3.8. 次の 2 次不等式を満たす x の範囲を求めなさい．

(1) $x^2 - x - 2 < 0 \iff (x - 2)(x + 1) < 0$． $\underline{-1 < x < 2}$

(2) $2x^2 + x - 1 > 0 \iff (2x - 1)(x + 1) > 0$． $\underline{x < -1,\ \frac{1}{2} < x}$

(3) $-x^2 - x + 2 < 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff (x - 1)(x + 2) > 0$．
$\underline{x < -2,\ 1 < x}$

(4) $2x^2 - 5x - 1 \geq 0$ $2x^2 - 5x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$．不等号の向きから
$\underline{x \leq \frac{5 - \sqrt{33}}{4},\ \frac{5 + \sqrt{33}}{4} \leq x}$

(5) $-2x^2 + 7x < 3 \iff 2x^2 - 7x + 3 > 0 \iff (2x - 1)(x - 3) > 0$．
$\underline{x < \frac{1}{2},\ 3 < x}$

(6) $x^2 + x \leq 3x + 24 \iff x^2 - 2x - 24 \leq 0 \iff (x-6)(x+4) \leq 0.$
$\underline{-4 \leq x \leq 6}$

問題 3.9. 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$ の値が 0 以上であるための k の条件を求めなさい．

この関数のグラフは下に凸で，$f(x)$ の最小値は $-k^2 + k + 2 = -(k-2)(k+1)$ である（問題 3.4 の解答を参照）．これが 0 以上，つまり $(k-2)(k+1) \leq 0$ になるのは $\underline{-1 \leq k \leq 2}$ のときである．

問題 3.10. 次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めなさい．

(1) $x^2 + 1 = 0$ $\underline{x = \pm i}$
(2) $(x+1)^2 + 4 = 0 \iff 0 = (x+1)^2 - (2i)^2 = (x+1-2i)(x+1+2i).$
したがって，$\underline{x = -1 \pm 2\,i}$
(3) $x^2 + 2x + 5 = 0$ 解の公式より，$\underline{x = -1 \pm 2\,i}$
(4) $x^2 + 3x + 4 = 0$ 解の公式より，$\underline{x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}}$
(5) $3x^2 + 4x + 2 = 0$ 解の公式より，$\underline{x = \frac{-2 \pm \sqrt{2}\,i}{3}}$

問題 3.11. 次の式を計算し，$a + b\,i$（ただし，a, b は実数）の形に直しなさい．

(1) $(2-3i) - (-1-4i) = 3 + i$
(2) $(4-2i)(3i-1) = 2 + 14i$
(3) $3i(4+i) - 4(2i-1) = 1 + 4i$
(4) $(2+3i)^2 = -5 + 12i$
(5) $(i-1)^3 = 2i + 2$
(6) $i^5 = i$
(7) $\dfrac{3+2i}{3-i} = \dfrac{7+9i}{10}$