問題 **1.** 次の計算をしなさい（各 10 点）.

- $\sqrt{27} \times \sqrt{39} = \sqrt{3^2 \times 3} \times \sqrt{3 \times 13} = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{13} = 3 \times 3 \times \sqrt{13} = \mathbf{9\sqrt{13}}$

- $\sqrt{3} < 2$，$\sqrt{3} < 5$ であるから $|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$，$|\sqrt{3}-5| = 5-\sqrt{3}$．したがって
  $|\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-5| = (2-\sqrt{3}) + (5-\sqrt{3}) = \mathbf{7-2\sqrt{3}}$

- $(|2-\sqrt{5}|+2)^2 = (\sqrt{5}-2+2)^2 = (\sqrt{5})^2 = \mathbf{5}$

- $\pi > 3$ であるから，
  $|\pi-3| - |\pi+4| = (\pi-3) - (\pi+4) = \mathbf{-7}$

- $(\sqrt{3}-1)^3 = (\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-1)$
  $= (3-2\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$
  $= (4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)$
  $= 4\sqrt{3}-4-6+2\sqrt{3}$
  $= \mathbf{6\sqrt{3}-10}$

- $3\sqrt{27}+2\sqrt{12}-\sqrt{75}$
  $= 3\sqrt{3^2 \times 3} + 2\sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3}$
  $= 9\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$
  $= \mathbf{8\sqrt{3}}$

- $(2\sqrt{3}-5)(\sqrt{3}+3) = 6+6\sqrt{3}-5\sqrt{3}-15 = \mathbf{\sqrt{3}-9}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3-2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

- $\sqrt{12} \times \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \times 3} \times \sqrt{3^2 \times 5} = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{15}}$

問題 2. 無理数に 0 でない有理数をかけたものは無理数であることを示しなさい.

x を無理数とする. $\boldsymbol{x}$ と, $\mathbf{0}$ でないある有理数 $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ （つまり, $\boldsymbol{m, n}$ はともに $\mathbf{0}$ でない整数）の積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\frac{m}{n}}$ が有理数になったと仮定すると

$$x \times \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \quad (k, l \text{ は整数}) \tag{1}$$

と表せる. (1) 式の両辺に $\frac{n}{m}$ をかけることにより

$$x = \frac{kn}{lm} \tag{2}$$

となる. 整数と整数の積はまた整数になるから, (2) 式の右辺は有理数となる. これは, $\boldsymbol{x}$ を無理数とした仮定に矛盾する.

「x に 0 でない有理数 $\frac{m}{n}$ をかけたものが有理数になる」と仮定して矛盾が生じたので, この命題が偽である. したがって,「x に 0 でない有理数 $\frac{m}{n}$ をかけたものは有理数ではない」, つまり「x に 0 でない有理数 $\frac{m}{n}$ をかけたものは無理数である」.

注意. 背理法の証明では以下のことに気をつけよう；

- 前提条件となる仮定（ここでは「x が無理数」）と示したい命題の否定命題（ここでは「無理数 x に対し, qx が有理数となるような有理数 q が存在する」）を明確にすること.
- 仮定からどのような矛盾が導かれたのか（ここでは「x が有理数となる」）を明確にすること.