基礎数学（毎日） — 問題演習（三角関数のグラフ，加法定理の応用）　2009.5.25（担当：佐藤）

注意.

- 問題 1〜3 は三角関数のグラフに関する問題です.
- 2 ページ目は加法定理から得られるさまざまな公式について述べてますこれらをすべて暗記する必要はありません.「正弦，余弦の加法定理から得られる」ということを認識してくだい.（一度は自力で計算して公式を導きだしてほしい).

関数のグラフの平行移動，関数の周期

$f(x)$ を実数上の関数とする（実数 x に対して実数 $f(x)$ がきまる).

- $y = f(x-p)+q$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $+p$，y 軸方向に $+q$ 平行移動したものとなる（グラフの形は変わらない．位置が異なる).
- どんな x に対しても $f(x+k) = f(x)$ が成り立つとき，k を関数 $f(x)$ の周期という（この条件を満たす関数を周期関数という).

問題 1. 角度 x（ラジアン）に対して，その正弦の値 $\sin x$ を対応させる関数は周期関数である．その周期を答えよ.

三角関数の性質より $\sin(x+2\pi) = \sin x$
したがって 周期は 2π

問題 2. 次の関数の周期を答えよ.

(1) $f(x) = \cos x$
(2) $f(x) = \sin(3x)$
(3) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$
(4) $f(x) = \sin(x+3)$

(1) 2π

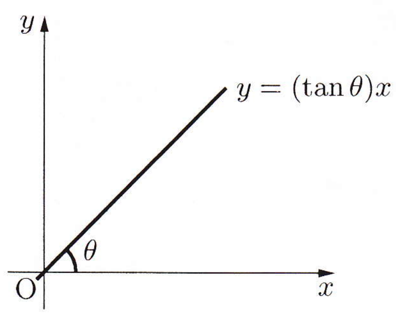
$f(x+\frac{2}{3}\pi) = \sin(3(x+\frac{2}{3}\pi)) = \sin(3x+2\pi) = \sin(3x)$
$= f(x)$
(2) $\therefore \frac{2}{3}\pi$

(3) 4π

(4) 2π

正接 $\tan\theta$ の幾何学的解釈２

原点を通る直線 $y = ax$ と x 軸の正の部分とのなす角が θ のとき，$\tan\theta$ はこの直線の傾き a である.



問題 3. 教科書 p.83 の問題 4.3 をやりなさい.

倍角，3 倍角の公式

- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
- $\sin(3\theta) = \sin\theta - 4\sin^3\theta$
- $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

問題 4. 加法定理を使って，倍角，3 倍角の公式を導きだしなさい．

問題 5. $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ を展開し，整理せよ（i は虚数単位．$i^2 = -1$）．

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ ，$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

正接の加法定理

(1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

問題 6. 正接の加法定理を証明せよ．

和積公式

(1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(2) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(3) $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(4) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

積和公式

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}$

(2) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

(3) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

問題 7. 教科書 p.85 を参考にして，上の和積公式，積和公式を完成させよ．