基礎数学（毎日） — 問題演習（高次多項式の因数分解，多項式の割り算）2009.5.19（担当：佐藤）

問題 1. 次の式を約分して簡単にせよ．

(1) $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} = \dfrac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}} = x+3$ (2) $\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4} = \dfrac{(2x+1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 2x+1$

(3) $\dfrac{5-9x-2x^2}{x+5} = \dfrac{(5+x)(1-2x)}{x+5}$

多項式の割り算

- x の多項式：(x^k の実数倍）の和で表される式のこと．
  (例． $x+1,\ 2x^2-1,\ x^4+3x^3-x^2+5x-3, \ldots$ 等)
- 多項式の演算と整数の演算は似ている．
- 整数の割り算；$p \div q = r$ あまり $s \iff p = qr + s$.
  (例． $37 \div 5 = 7$ あまり $2 \iff 37 = 5 \times 7 + 2$)
- 多項式の割り算は与えられた多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

を満たす多項式 $q(x)$ と $r(x)$ を求めること．

問題 2.

$$\frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1}$$

を参考にして，次の分数の式を

$$(\text{多項式}) + \frac{(\text{整数})}{(\text{多項式})}$$

の形に変形せよ． $\therefore 2 + \dfrac{1}{x+1}$

(1) $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+1}{x+1}$ (2) $\dfrac{3x+2}{2x-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x+2}{x-\frac{1}{2}}\right)$ (3) $\dfrac{x^2+2x+2}{x-1} = \dfrac{x(x-1)+3x+2}{x-1}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}+2}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{\frac{7}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4x-2}$

$= x + \dfrac{3x+2}{x-1}$

$= x + \dfrac{3(x-1)+5}{x-1}$

$= x+3+\dfrac{5}{x-1}$

問題 3. 次の割り算を計算せよ．

(1) $(x^2-x+3) \div (x-3)$

(2) $(2x^3-x^2+4) \div (x+1)$

(3) $(x^3+3x^2+x-3) \div (x^2+x-1)$

（裏へ続く）

問3

(1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
\hline
x-3 & x^2-x+3 \\
 & \underline{x^2-3x} \\
 & \quad 2x+3 \\
 & \quad \underline{2x-6} \\
 & \qquad 9
\end{array}
$$

$\therefore (x^2-x+3) \div (x-3) = \underline{x+2}$

あまり $\underline{9}$

$\left((x^2-x+3) = (x-3)(x+2) + 9 \right)$

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+3 \\
\hline
x+1 & 2x^3-x^2 \boxed{} +4 \\
 & \underline{2x^3+2x^2} \\
 & \quad -3x^2 \\
 & \quad \underline{-3x^2-3x} \\
 & \qquad 3x+4 \\
 & \qquad \underline{3x+3} \\
 & \qquad \quad 1
\end{array}
$$

$\therefore (2x^3-x^2+4) \div (x+1) = 2x^2-3x+3$

あまり 1

$\left((2x^3-x^2+4) = (x+1)(2x^2-3x+3) + 1 \right)$

(3)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
\hline
x^2+x-1 & x^3+3x^2+x-3 \\
 & \underline{x^3+x^2-x} \\
 & \quad 2x^2+2x-3 \\
 & \quad \underline{2x^2+2x-2} \\
 & \qquad -1
\end{array}
$$

$\therefore (x^3+3x^2+x-3) \div (x^2+x-1)$

$= \underline{x+2}$

あまり $\underline{-1}$

$\left((x^3+3x^2+x-3) = (x+2)(x^2+x-1) - 1 \right)$

高次多項式の因数分解，因数定理

$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商が $q(x)$ であまりが $r(x)$ とする；

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

- 任意の $x = a$ に対して $f(a) = g(a) \cdot q(a) + r(a)$ である．
- 特に $g(x) = x - \alpha$（つまり 1 次多項式）のとき，$f(\alpha) = r(\alpha)$ が成り立つ．
- したがって，次数が 3 次以上の多項式 $f(x)$ の因数分解は
  (1) まず，$f(\alpha) = 0$ となる α をみつける．
  (2) $f(x)$ を $(x - \alpha)$ で割る（$f(x) = (x - \alpha)q(x)$）．
  (3) ~~$q(x)$ を $(x - \alpha)$ で割る（の繰り返し~~）．

問題 4. 次の式を簡単にせよ（因数分解せよ）．

(1) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ $= \dfrac{(2x^2+x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2x^2+x-1 = (2x-1)(x+1)$

(2) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(3) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

(関連問題：教科書 **問題 3.7, 3.8, 3.9, 3.10**)

(2) $f(x) = x^3+2x^2-x-2$ とおく

$f(1)=0$ だから $f(x)$ は $(x-1)$ を因数としてもつ（$(x-1)$ で割り切れる）

$f(x) = (x-1)(x^2+3x+2)$

$= (x-1)(x+2)(x+1)$

(3) $f(x) = x^3-x^2-5x-3$

$f(-1)=0$

$f(x) = (x+1)(x^2-2x-3)$

$= (x+1)(x-3)(x+1)$

$= (x+1)^2(x-3)$