基礎数学 期末テスト 略解 **7/16/09**（佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問に答えよ．（各 5 点）

(1) $\log_5 40 - \log_5 8$ を計算しなさい．

$\log_5 40 - \log_5 8 = \log_5 \dfrac{40}{8} = \log_5 5 = \mathbf{1}.$

(2) $\log_8 16$ を簡単にして有理数にしなさい．

$\log_8 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}.$

(3) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ に対し，$y = f(x)$ の点 $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めなさい．

$f'(x) = 2x + 3$，$f'(2) = 7$，$f(2) = 9$ より，接線の方程式は $y = 7(x-2) + 9 = \boldsymbol{7x - 5}.$

(4) 不定積分 $\displaystyle\int (x^2 + 2x + 1)\,dx$ を求めなさい．

$\boldsymbol{\dfrac{x^3}{3} + x^2 + x + C}.$

(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x^3 + x - 1)\,dx$ の値を求めなさい．

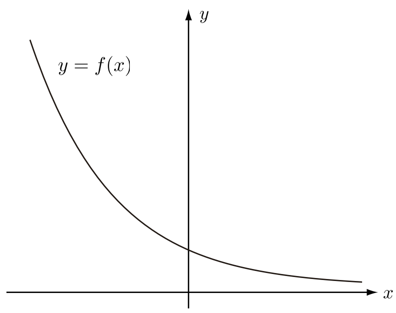
$$\int_{-1}^{1} (2x^3 + x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = \mathbf{-2}$$

(6) 一般項が $a_n = 2 - 5n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は等差数列か等比数列か答えよ．さらに $\{a_n\}$ の公差または公比を求めよ．

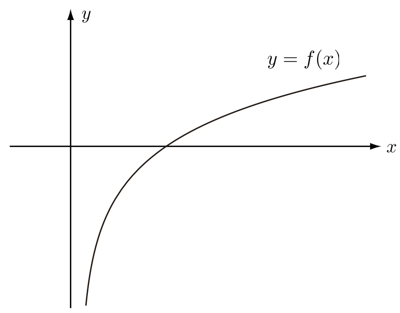
公差が $\mathbf{-5}$ の等差数列．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の図はある関数 $f(x)$ のグラフである．各グラフの $f(x)$ としてもっとも近いものを（ア）〜（カ）の中から選べ．（各 10 点）

(1) （ウ） $f(x) = 2^{-x}$



(2) （オ） $f(x) = \log_2 x$



$\boxed{\mathbf{3}}$ 漸化式 $a_{n+1} = 4a_n - 3$（ただし $a_1 = 2$）で与えられる数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．(10 点)

$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = (4a_{n+1} - 3) - (4a_n - 3) = 4(a_{n+1} - a_n) = 4b_n$．したがって，階差数列 $\{b_n\}$ は公比が 4 の等比数列である．初項は $b_1 = a_2 - a_1 = (4a_2 - 3) - a_1 = 3a_1 - 3 = 3 \times 2 - 3 = 3$．以上のことから，$\{b_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{b_n = 3 \times 4^{n-1}}$．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 4$ について以下の問いに答えよ.（各 10 点）

(1) $f(x)$ の極値を求めなさい.

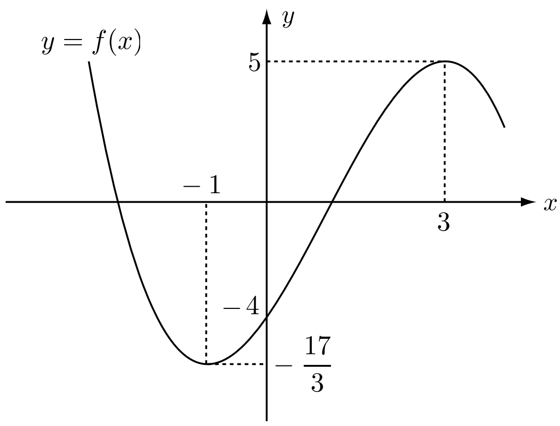
(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描きなさい（前問で求めた極値，y 切片の情報を図中にわかりやすく書き加えること）.

$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1)$. しがって，$f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$ と $x = 3$ のときである．増減表は以下のようになる；

x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	減少	$-\frac{17}{3}$	増加	5	減少

したがって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = 3}$ **のとき極大値 5**，$\boldsymbol{x = -1}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{17}{3}}$ をとる.

$f(0) = -4$ より，グラフの y 切片は $\mathbf{(0, -4)}$.



$\boxed{\mathbf{5}}$ $y = x^2 - 2x - 3$ と $y = 2x + 2$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めなさい.（20 点）

$0 = (2x+2) - (x^2 - 2x - 3) = -(x^2 - 4x - 5) = -(x-5)(x+1)$ より，2 つのグラフは $x = -1$ と $x = 5$ の点で交わる．$y = x^2 - 2x - 3$ は下に凸の放物線だから，$-1 < x < 5$ の範囲では直線 $y = 2x + 2$ の方が y の値が大きい．したがって，求める面積は

$$\int_{-1}^{5} \{(2x+2) - (x^2 - 2x - 3)\} dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5} = \mathbf{36.}$$