# 階差数列

$\boxed{\text{数列 } \{a_n\} \text{ の階差数列 } \{b_n\}}$ ： $b_n = a_{n+1} - a_n$

$$a_1 \xrightarrow{+b_1} a_2 \xrightarrow{+b_2} a_3 \xrightarrow{+b_3} \cdots \xrightarrow{+b_{n-1}} a_n \xrightarrow{+b_n} \cdots$$

$$a_1 \xrightarrow{\qquad +(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}) \qquad} a_n$$

$$\therefore \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

階差数列の和が求めれば，$\{a_n\}$ の一般項が求まる

# 漸化式：$a_{n+1} = p\,a_n + q$（ただし $p, q$ は定数） — 解法その１

例：$a_1 = -1$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$

- $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3$

  $a_{n+1} = 2a_n + 3$；両辺それぞれ引き算すると

- $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$；$a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと

- $b_{n+1} = 2b_n$；

  $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$，公比 2 の等比数列である.

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{2\left(1 - 2^{n-1}\right)}{1 - 2} = 2^n - 2.$$

したがって，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -1 + (2^n - 2) = \underline{2^n - 3}$

# 漸化式：$a_{n+1} = p\,a_n + q$（ただし $p, q$ は定数）— 解法その２

例：$a_1 = -1$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$

解法のアイデア

$$a_{n+1} = p\,a_n + q \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} + r = p\,(a_n + r)$$

- $a_{n+1} = 2a_n + 3 \Longrightarrow a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ ；$c_n = a_n + 3$ とおくと
- $c_{n+1} = 2c_n$ ；

  $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = a_1 + 3 = (-1) + 3 = 2$，公比 2 の等比数列である.

$$c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって，$a_n = c_n - 3 = \underline{2^n - 3}$