積分のはなし

「積分の 2 つの側面」

1. 微分の逆演算 （微分方程式の初歩）

$$\boxed{\text{運動の様子：関数 } f(x)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{\text{瞬間の変化：導関数 } f'(x)}$$

$$\boxed{\text{運動の様子：原始関数 } F(x)} \xleftarrow{\text{不定積分}} \boxed{\text{瞬間の変化：関数 } f(x)}$$

2. 求積法：面積の計算（リーマン積分）

- 歴史的にはこちらの考え方が最初. 「積分」とは面積を求めること.
- 1 の 2 を結びつけるものが「微分積分学の基本定理」
- 実際の計算：定積分

不定積分

- 関数 $f(x)$ に対し，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．
- $f(x)$ の原始関数はたくさんある．
- $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ： $f(x)$ の不定積分（C は積分定数）
- 積分記号 $\displaystyle\int$ （読み方：インテグラル）

不定積分

微分の性質

- $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$．定数関数 $f(x) = c$ に対して，$f'(x) = 0$．
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
- $(k\,f(x))' = k\,f'(x)$ （k は定数）．

不定積分の性質

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.
- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
- $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ （k は定数）．

定積分

- 記号 $[f(x)]_a^b := f(b) - f(a)$
- $x = a$ から $x = b$ までの $f(x)$ の定積分：

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数）}$$

定積分の性質（定理 7.2）

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k は定数）.
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$