基礎数学 —— レポート課題 略解 **2009.6.23**（担当：佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数を求めなさい．

(1) $f(x)=2x^3+x^2-x-3,\quad a=1\quad f'(x)=6x^2+2x-1,\ f'(1)=7$

(2) $f(x)=-2x,\quad a=10\quad f'(x)=-2,\ f'(10)=-2$

(3) $f(x)=x^3+2x^2-4x+7,\quad a=-2\quad f'(x)=3x^2+4x-4,\ f'(-2)=0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数 $f(x)$ の $x=a$ における接線の方程式を求めなさい．

(1) $f(x)=x^3-5x+1,\quad a=1\quad f'(x)=3x^2-5,\ y=-2x-1$

(2) $f(x)=-2x+1,\quad a=3\quad f'(x)=-2,\ y=-2x+1$

(3) $f(x)=x^2+2x+3,\quad a=-1\quad f'(x)=2x+2,\ y=2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい（増減表も書きなさい）．

グラフは省略します．増減表を参考に各自確認してください．「グラフを描け」という問題では必ず y 切片の値 $f(0)$ も記入すること．できれば，グラフと x 軸との交点の座標も書いた方が望ましい．

(1) $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x-4\quad f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

x		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	増加	6	減少	$-\frac{15}{2}$	増加

(2) $f(x)=2x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+1\quad f'(x)=6x^2+x-1=(2x+1)(3x-1)$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	増加	$\frac{11}{8}$	減少	$\frac{43}{54}$	増加

(3) $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-7x^2+12x+3\quad f'(x)=2x^3-14x+12=2(x-1)(x+3)(x-2)$

x		-3		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	減少	$-\frac{111}{2}$	増加	$\frac{17}{2}$	減少	7	増加

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の関数 $f(x)$ の与えられた区間での最大値・最小値を求めなさい．

(1) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2 \quad (-2 \leq x \leq 1)$

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x+3)(x-1)$

x	-2		1
$f'(x)$	$+$	$+$	0
$f(x)$	-24	増加	3

最大値は 3（$x=1$ のとき），最小値は -24（$x=-2$ のとき）

(2) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 3x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 1)$

$f'(x) = 6x^2 + 3x - 3 = 3(2x-1)(x+1)$

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-5	増加	$\frac{3}{2}$	減少	$-\frac{15}{8}$	増加	$-\frac{1}{2}$

最大値は $\frac{3}{2}$（$x=-1$ のとき），最小値は -5（$x=-2$ のとき）

(3) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^4 - x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \quad (-3 \leq x \leq 1)$

$f'(x) = 6x^3 - 3x^2 - 24x + 12 = 3(2x-1)(x-2)(x+2)$

x	-3		-2		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	減少	-44	増加	$-\frac{33}{32}$	減少	$-\frac{7}{2}$

最大値は $\frac{1}{2}$（$x=-3$ のとき），最小値は -44（$x=-2$ のとき）

$\boxed{\mathbf{5}}$ 下の議論（削除）を参考にして $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ を微分せよ．

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \times \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{2hx+h^2}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} \\
&= \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$