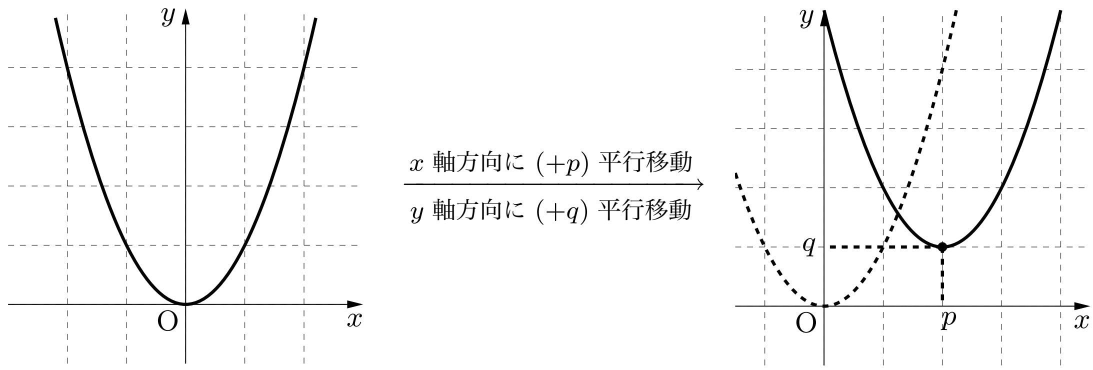
基礎数学 — ２次関数のグラフに関する補足　**2009.5.13**（担当：佐藤）

補足１　授業では $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの概形を考えるために，$y = x^2$ のグラフを基本形とし，それを三段階の変形で構成する方法を紹介しましたが，「$y = ax^2$ を２回（２つの方向へ）平行移動する」と考えてもよいでしょう．

$y = ax^2$　　　　　　$y = a(x-p)^2 + q$



($a > 0$ の場合)　　　　　　($p, q > 0$ の場合)

問題 1.　次の２次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ の形で書き表し，グラフの概形を描きなさい．

(1) $y = x^2$ を x 軸方向に $(+2)$，y 軸方向に $(+1)$ だけ平行移動したもの．

(2) $y = -2x^2$ を x 軸方向に $(+1)$，y 軸方向に (-2) だけ平行移動したもの．

$\boxed{\text{補足２}}$　式 $y = a(x-p)^2 + q$ からこの 2 次関数の性質をくつか列挙し，グラフの概形を考えてみる．

- 関数 $y = a(x-p)^2 + q$ は $x = p$ のとき $y = q$ だから，グラフは点 $\boldsymbol{(p, q)}$ を通る．
- $a > 0$ のとき $a(x-p)^2$ は必ず 0 以上である（なぜならどんな実数も 2 乗すれば 0 以上になるし，0 以上の実数に正の数 a をかけたものもまた 0 以上である）．したがって，

$$y = a(x-p)^2 + q = \{0 \text{ 以上 }\} + q$$

  となり，$\boldsymbol{a > 0}$ とき，$\boldsymbol{y}$ の値は必ず $\boldsymbol{q}$ 以上である．
- 上と同様に考えると，$\boldsymbol{a < 0}$ とき，$\boldsymbol{y}$ の値は必ず $\boldsymbol{q}$ 以下であることがわかる．
- $y = q$ となるのは $x = p$ のときのみ．つまり，$a > 0$ のとき点 (p, q) はグラフの最小値（$a < 0$ のときは最大値）を与える．この点 (p, q) を頂点とよんだ．
- $x = 0$ のとき，$y = ap^2 + q$．つまり $\boldsymbol{y}$ 軸との交点は $\boldsymbol{(0, ap^2 + q)}$．

問題 **2.**　次の性質を持つ２次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ の形で書き表し，グラフが上に凸か，下に凸か述べよ．

(1) 頂点が $(-2, 3)$ で，y 軸との交点が $(0, 4)$．

(2) 頂点が $(1, 2)$ で，y 軸との交点が $(0, 1)$．