補足２　式 $y = a(x-p)^2 + q$ からこの２次関数の性質をくつか列挙し，グラフの概形を考えてみる．

- 関数 $y = a(x-p)^2 + q$ は $x = p$ のとき $y = q$ だから，グラフは点 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を通る．
- $a > 0$ のとき $a(x-p)^2$ は必ず 0 以上である（なぜならどんな実数も 2 乗すれば 0 以上になるし，0 以上の実数に正の数 a をかけたものもまた 0 以上である）．したがって，

$$y = a(x-p)^2 + q = \{0 \text{ 以上 }\} + q$$

となり，$\boldsymbol{a > 0}$ とき，$\boldsymbol{y}$ の値は必ず $\boldsymbol{q}$ 以上である．
- 上と同様に考えると，$\boldsymbol{a < 0}$ とき，$\boldsymbol{y}$ の値は必ず $\boldsymbol{q}$ 以下であることがわかる．
- $y = q$ となるのは $x = p$ のときのみ．つまり，$a > 0$ のとき点 (p, q) はグラフの最小値（$a < 0$ のときは最大値）を与える．この点 (p, q) を頂点とよんだ．
- $x = 0$ のとき，$y = ap^2 + q$．つまり $\boldsymbol{y}$ 軸との交点は $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{ap^2 + q})$．

$y = ax^2 + bx + c$ と表したとき，定数項 c が y 軸との交点．

問題 2.　次の性質を持つ２次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ の形で書き表し，グラフが上に凸か，下に凸か述べよ．

(1) 頂点が $(-2, 3)$ で，y 軸との交点が $(0, 4)$．

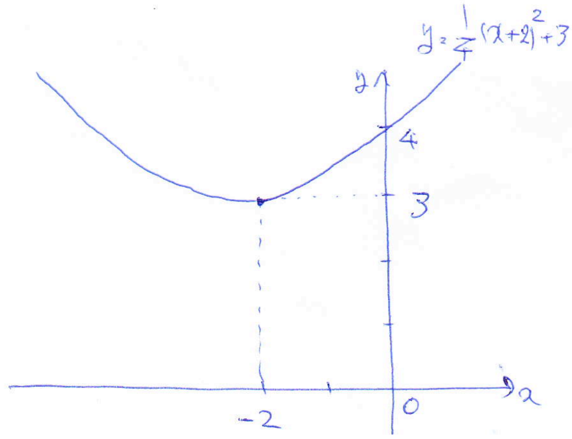
頂点が $(-2,3)$ だから

$y = a(x+2)^2 + 3$

と書ける。また $x=0$ のとき $y=4$ だから

$4 = a(0+2)^2 + 3 = 4a + 3$

$1 = 4a$　$\therefore a = \frac{1}{4}$



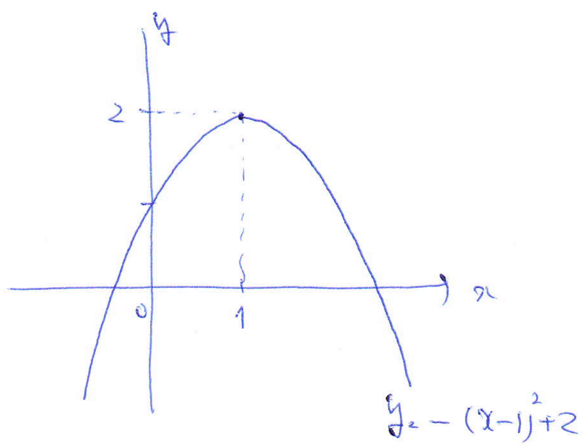
(2) 頂点が $(1, 2)$ で，y 軸との交点が $(0, 1)$．

$y = a(x-1)^2 + 2$

$1 = a(0-1)^2 + 2$

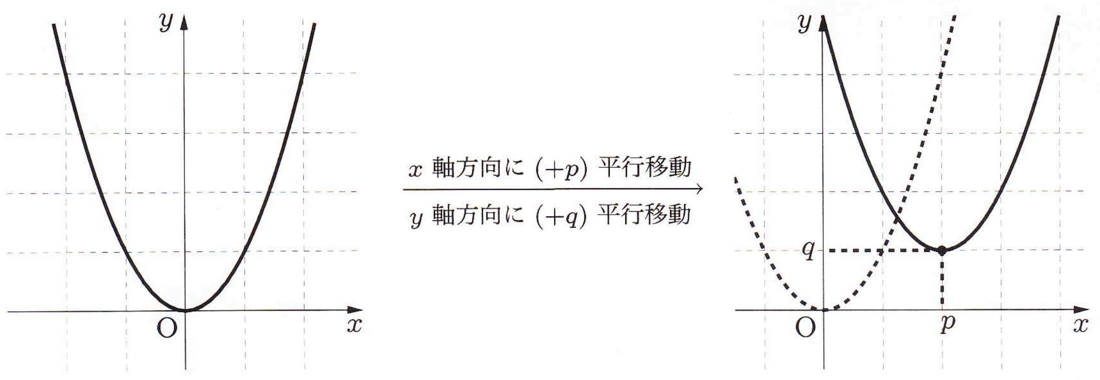
$= a + 2$

$\therefore a = -1$



補足１　授業では $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの概形を考えるために，$y = x^2$ のグラフを基本形とし，それを三段階の変形で構成する方法を紹介しましたが，「$y = ax^2$ を２回（２つの方向へ）平行移動する」と考えてもよいでしょう．

$y = ax^2$　　　　　　　　　　　　$y = a(x-p)^2 + q$

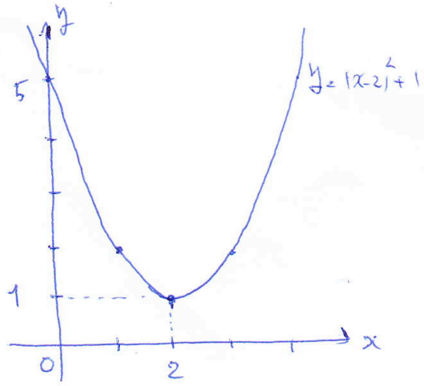


$(a > 0$ の場合$)$　　　　　　　　　　　　$(p, q > 0$ の場合$)$

問題 1.　次の２次関数を $y = a(x-p)^2 + q$ の形で書き表し，グラフの概形を描きなさい．

(1) $y = x^2$ を x 軸方向に $(+2)$，y 軸方向に $(+1)$ だけ平行移動したもの．

A.　$y = (x-2)^2 + 1$



(2) $y = -2x^2$ を x 軸方向に $(+1)$，y 軸方向に (-2) だけ平行移動したもの．

A.　$y = -2(x-1)^2 - 2$