問題 1. 次の式を展開せよ．

(1) $(2x+1)(x-4)$
(2) $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$

因数分解

- 因数分解：「式の展開」の逆操作．共通因数でまとめること．
  (例：$ab+ac=a(b+c)$)
- **（2 次多項式の場合）**：与えられた式 ax^2+bx+c を

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \tag{1}$$

  と式変形すること．つまり，因数分解とは上の式を満たす α と β を見つけることである．
  (1) の右辺を展開すると $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$．これが，$ax^2+bx+c$ と等しくなるわけだから，c が整数の場合，α,β は c の因数である可能性が高い．
- 3 次以上の多項式の場合も同様．より次数の低い多項式の積で書き表す．

問題 2. 次の式を因数分解せよ．

(1) $2a(x+y)-bc(x+y)$
(2) $a^3bc^2-3a^2b^2c^3$

問題 3. 次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+x-6
(2) x^2-2x-8
(3) $2x^2-5x-3$
(4) x^2+2x-1

2 次方程式と因数分解

- 実数の性質：$AB=0 \iff$「$A=0$」または「$B=0$」
- $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できたとする．このとき，上の性質を使うと 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\alpha,\beta$ であることがわかる．
- 逆に，因数分解が困難なときは，解の公式を用いて (1) の α,β を探すことができる．

不等式と因数分解

前回，2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ (または >0) を解く際，2 次関数のグラフの概形を描いてから解を導いた．しかし，x 軸との交点 (つまり 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解) と上に凸か下に凸かを明らかにすることで 2 次不等式を解くことができる．ここでも因数分解が役立つ．

問題 **4.** 次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2-2x-3<0$

(2) $2x^2+7x+3>0$

問題 **5.** 次の式を約分して簡単にせよ．

(1) $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ (2) $\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}$

(3) $\dfrac{5-9x-2x^2}{x-5}$

多項式の割り算

- x の多項式：(x^k の実数倍) の和で表される式のこと．
  (例．$x+1,\ 2x^2-1,\ x^4+3x^3-x^2+5x-3,\dots$ 等)
- 多項式の演算と整数の演算は似ている．
- 整数の割り算；$p\div q=r$ あまり $s \iff p=qr+s$.
  (例．$37\div 5=7$ あまり $2 \iff 37=5\times 7+2$)
- 多項式の割り算は与えられた多項式 $p(x)$ と $q(x)$ に対して

$$p(x)=q(x)\cdot r(x)+s(x)$$

  を満たす多項式 $r(x)$ と $s(x)$ を求めること．

問題 **6.** $\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=3+\dfrac{4}{x-1}$ を参考にして，次の分数の式を

$$(\text{多項式})+\frac{(\text{整数})}{(\text{多項式})}$$

の形に変形せよ．

(1) $\dfrac{2x+3}{x+1}$ (2) $\dfrac{3x+2}{2x-1}$ (3) $\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$

問題 **7.** 次の割り算を計算せよ．

(1) $(x^2 - 1 + 3) \div (x - 3)$

(2) $(2x^3 - x^2 + 4) \div (x + 1)$

(3) $(x^3 + 3x^2 + x - 3) \div (x^2 + x - 1)$

高次多項式の因数分解，因数定理

$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商が $q(x)$ であまりが $r(x)$ とする；

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

- 任意の $x = a$ に対して $f(a) = g(a) \cdot q(a) + r(a)$ である．
- 特に $g(x) = x - \alpha$（つまり 1 次多項式）のとき，$f(\alpha) = r(\alpha)$ が成り立つ．
- したがって，次数が 3 次以上の多項式 $f(x)$ の因数分解は

  (1) まず，$f(\alpha) = 0$ となる α をみつける．

  (2) $f(x)$ を $(x - \alpha)$ で割る（$f(x) = (x - \alpha)q(x)$）．

  (3) 同様に $q(x)$ を因数分解する（繰り返し）．

問題 **8.** 次の式を簡単にせよ（因数分解せよ）．

(1) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(2) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(3) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

（関連問題：教科書 問題 **3.1** 〜 **3.10**）