問題 1. 次の式を展開せよ．

(1) $(2x+1)(x-4)$ $= 2x^2 - 7x - 4$

(2) $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$ $= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

因数分解

- 因数分解：「式の展開」の逆操作．共通因数でまとめること．
  （例：$ab+ac=a(b+c)$）
- （**2** 次多項式の場合）：与えられた式 ax^2+bx+c を

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \qquad (1)$$

  と式変形すること．つまり，因数分解とは上の式を満たす α と β を見つけることである．
  (1) の右辺を展開すると $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$．これが，$ax^2+bx+c$ と等しくなるわけだから，c が整数の場合，α,β は c の因数である可能性が高い．
- 3 次以上の多項式の場合も同様．より次数の低い多項式の積で書き表す．

問題 2. 次の式を因数分解せよ．

(1) $2a(x+y)-bc(x+y)$ $= (2a-bc)(x+y)$

(2) $a^3bc^2-3a^2b^2c^3$ $= a^2bc^2(a-3bc)$

問題 3. 次の式を因数分解せよ．

(1) x^2+x-6 $= (x+3)(x-2)$

(2) x^2-2x-8 $= (x-4)(x+2)$

(3) $2x^2-5x-3$ $= (2x+1)(x-3)$

(4) x^2+2x-1 $= (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

2 次方程式と因数分解

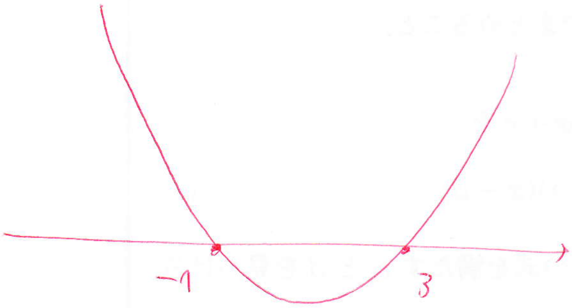
- 実数の性質：$AB=0 \Longleftrightarrow$ 「$A=0$」または「$B=0$」
- $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できたとする．このとき，上の性質を使うと 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\alpha,\beta$ であることがわかる．
- 逆に，因数分解が困難なときは，解の公式を用いて (1) の α,β を探すことができる．

問題 4

(1) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$y=x^2-2x-3$ のグラフは

下に凸で以下のようになる



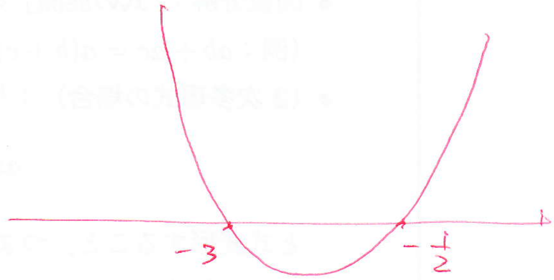
したがって $y<0$ となるのは

$-1<x<3$

(2) $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$

$y=2x^2+7x+3$ のグラフは

下に凸で



したがって $y>0$ となるのは

$x<-3,\quad x>-\frac{1}{2}$

不等式と因数分解

前回，2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$（または >0）を解く際，2 次関数のグラフの概形を描いてから解を導いた．しかし，x 軸との交点（つまり 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解）と上に凸か下に凸かを明らかにすることで 2 次不等式を解くことができる．ここでも因数分解が役立つ．

問題 4. 次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2-2x-3<0$

(2) $2x^2+7x+3>0$

問題 5. 次の式を約分して簡単にせよ．

(1) $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} = \dfrac{(\cancel{x+2})(x+3)}{(\cancel{x+2})} = \underline{x+3}$

(2) $\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4} = \dfrac{(2x+1)(\cancel{x-4})}{(\cancel{x-4})} = \underline{2x+1}$

(3) $\dfrac{5-9x-2x^2}{x+5} = \dfrac{(\cancel{5+x})(1-2x)}{\cancel{x+5}} = \underline{1-2x}$

多項式の割り算

- x の多項式：（x^k の実数倍）の和で表される式のこと．
  （例．$x+1,\ 2x^2-1,\ x^4+3x^3-x^2+5x-3,\dots$ 等）
- 多項式の演算と整数の演算は似ている．
- 整数の割り算；$p \div q = r$ あまり $s \iff p = qr+s$．
  （例．$37 \div 5 = 7$ あまり $2 \iff 37 = 5\times 7+2$）
- 多項式の割り算は与えられた多項式 $p(x)$ と $q(x)$ に対して

$$p(x) = q(x)\cdot r(x) + s(x)$$

を満たす多項式 $r(x)$ と $s(x)$ を求めること．

問題 6. $\dfrac{3x+1}{x-1} = \dfrac{3(x-1)+4}{x-1} = 3 + \dfrac{4}{x-1}$ を参考にして，次の分数の式を

$$(\text{多項式}) + \frac{(\text{整数})}{(\text{多項式})}$$

の形に変形せよ．

(1) $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+1}{x+1}$

$= \dfrac{2(x+1)}{x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

$= \underline{2 + \dfrac{1}{x+1}}$

(2) $\dfrac{3x+2}{2x-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x+2}{x-\frac{1}{2}}\right)$

2 $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}+2}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{\frac{7}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)$

$= \underline{\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4x-2}}$

(3) $\dfrac{x^2+2x+2}{x-1} = \dfrac{x(x-1)+3x+2}{x-1}$

$= x + \dfrac{3x+2}{x-1}$

$= x + \dfrac{3(x-1)+5}{x-1}$

$= \underline{x+3+\dfrac{5}{x-1}}$

問題 7. 次の割り算を計算せよ．

(1) $(x^2 - 1 + 3) \div (x - 3)$

(2) $(2x^3 - x^2 + 4) \div (x + 1)$

(3) $(x^3 + 3x^2 + x - 3) \div (x^2 + x - 1)$

高次多項式の因数分解，因数定理

$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商が $q(x)$ であまりが $r(x)$ とする；

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

- 任意の $x = a$ に対して $f(a) = g(a) \cdot q(a) + r(a)$ である．
- 特に $g(x) = x - \alpha$（つまり 1 次多項式）のとき，$f(\alpha) = r(\alpha)$ が成り立つ．
- したがって，次数が 3 次以上の多項式 $f(x)$ の因数分解は
  (1) まず，$f(\alpha) = 0$ となる α をみつける．
  (2) $f(x)$ を $(x - \alpha)$ で割る（$f(x) = (x - \alpha)q(x)$）．
  (3) 同様に $q(x)$ を因数分解する（繰り返し）．

問題 8. 次の式を簡単にせよ（因数分解せよ）．

(1) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ $= \dfrac{\cancel{(x-1)}(2x^2+x-1)}{\cancel{x-1}} = 2x^2+x-1 = (2x-1)(x+1)$

(2) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(3) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

(関連問題：教科書 問題 **3.1** ～ **3.10**)

(3) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

$f(-1) = 0$

$f(x) = (x+1)(x^2-2x-3)$

$= (x+1)(x-3)(x+1)$

$= (x+1)^2(x-3)$

(2) $f(x) = x^3+2x^2-x-2$ とおく

$f(1) = 0$ だから $f(x)$ は $(x-1)$ で

因数としてもつ（$(x-1)$ で割り切れる）

$f(x) = (x-1)(x^2+3x+2)$

$= (x-1)(x+2)(x+1)$

問題7

(1)

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
x-3\,\overline{)\,x^2-x+3} \\
x^2-3x \\
\hline
2x+3 \\
2x-6 \\
\hline
9
\end{array}
$$

$\therefore\ (x^2-x+3) \div (x-3) = \underline{x+2}$

あまり $\underline{9}$

$\left((x^2-x+3) = (x-3)(x+2) + 9 \right)$

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x^2-3x+3 \\
x+1\,\overline{)\,2x^3-x^2\qquad+4} \\
-)\ 2x^3+2x^2 \\
\hline
-3x^2 \\
-)\ -3x^2-3x \\
\hline
3x+4 \\
-)\ 3x+3 \\
\hline
1
\end{array}
$$

$\therefore\ (2x^3-x^2+4) \div (x+1)$

$= \underline{2x^2-3x+3}$

あまり $\underline{1}$

$\left((2x^3-x^2+4) = (x+1)(2x^2-3x+3) + 1 \right)$

(3)

$$
\begin{array}{r}
x+2 \\
x^2+x-1\,\overline{)\,x^3+3x^2+x-3} \\
-)\ x^3+x^2-x \\
\hline
2x^2+x-3 \\
-)\ 2x^2+2x-2 \\
\hline
-1
\end{array}
$$

$\therefore\ (x^3+3x^2+x-3) \div (x^2+x-1)$

$= \underline{x+2}$

$\underline{\text{あまり} -1}$

$\left((x^3+3x^2+x-3) = (x+2)(x^2+x-1) - 1 \right)$