基礎数学 期末テスト 略解 **7/16/09**（佐藤）

$\boxed{\mathbf{1}}$　次の各問に答えよ．（各 5 点）

(1)　$\log_3 24 - \log_3 8$ を計算しなさい．

$\log_3 24 - \log_3 8 = \log_3 \dfrac{24}{8} = \log_3 3 = \mathbf{1}.$

(2)　$3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{4}{3}} \div 27^{-\frac{1}{3}}$ を計算しなさい．

$3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{4}{3}} \div 27^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{4}{3}} \div (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{8}{3}} \div 3^{-1} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}} \times 3 = 3^4 = \mathbf{81}.$

(3)　$f(x) = x^2 + 3x - 1$ に対し，$y = f(x)$ の点 $(-2, f(-2))$ における接線の方程式を求めなさい．

$f'(x) = 2x+3$, $f'(-2) = -1$, $f(-2) = -3$ より，接線の方程式は $y = -(x-(-2)) - 3 = \boldsymbol{-x-5}.$

(4)　不定積分 $\displaystyle\int (x^2 + x + 2)\,dx$ を求めなさい．

$\boldsymbol{\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + C}.$

(5)　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x - 1)\,dx$ の値を求めなさい．

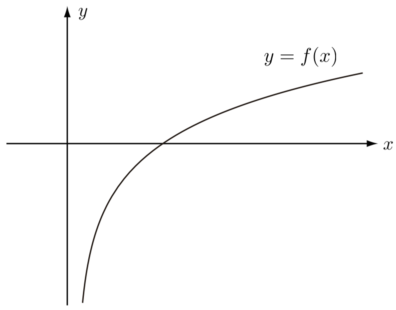
$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x\right]_{-1}^{1} = \mathbf{-2}$$

(6)　一般項が $a_n = 5 - 3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は等差数列か等比数列か答えよ．さらに $\{a_n\}$ の公差または公比を求めよ．

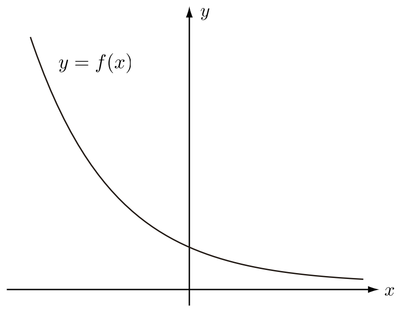
公差が $\mathbf{-3}$ の等差数列．

$\boxed{\mathbf{2}}$　次の図はある関数 $f(x)$ のグラフである．各グラフの $f(x)$ としてもっとも近いものを（ア）～（カ）の中から選べ．（各 10 点）

(1)　（オ）　$f(x) = \log_2 x$



(2)　（ウ）　$f(x) = 2^{-x}$



$\boxed{\mathbf{3}}$　漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 4$（ただし $a_1 = 2$）で与えられる数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．(10 点)

$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = (3a_{n+1} - 4) - (3a_n - 4) = 3(a_{n+1} - a_n) = 3b_n$．したがって，階差数列 $\{b_n\}$ は公比が 3 の等比数列である．初項は $b_1 = a_2 - a_1 = (3a_2 - 4) - a_1 = 2a_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 0$．以上のことから，$\{b_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{b_n = 0}.$

基礎数学 期末テスト 略解 **7/16/09**（佐藤）

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-4$ について以下の問いに答えよ．（各 10 点）

(1) $f(x)$ の極値を求めなさい．

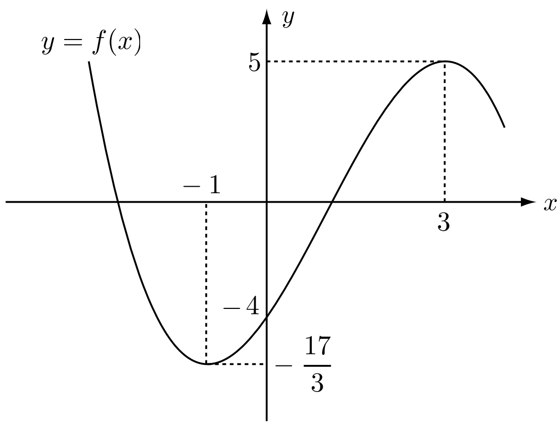
(2) $y=f(x)$ のグラフの概形を描きなさい（前問で求めた極値，y 切片の情報を図中にわかりやすく書き加えること）．

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)$．しがって，$f'(x)=0$ となるのは $x=-1$ と $x=3$ のときである．増減表は以下のようになる；

x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	減少	$-\frac{17}{3}$	増加	5	減少

したがって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=3}$ **のとき極大値 5**，$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{17}{3}}$ をとる．

$f(0)=-4$ より，グラフの y 切片は $\mathbf{(0,-4)}$．



$\boxed{\mathbf{5}}$ $y=x^2-6x+5$ と $y=2x-2$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めなさい．（20 点）

$0=(2x-2)-(x^2-6x+5)=-(x^2-8x+7)=-(x-7)(x-1)$ より，2 つのグラフは $x=1$ と $x=7$ の点で交わる．$y=x^2-6x+5$ は下に凸の放物線だから，$1<x<7$ の範囲では直線 $y=2x-2$ の方が y の値が大きい．したがって，求める面積は

$$\int_1^7\{(2x-2)-(x^2-6x+5)\}dx=\int_1^7(-x^2+8x-7)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-7x\right]_1^7=\mathbf{36.}$$