数学クォータ科目「基礎数学 I」第 5 回

対数の定義とその性質

佐藤 弘康 / 日本工業大学 共通教育学群

前回と前々回の授業内容と今回の授業で理解してほしいこと

- a^x の定義
- 指数法則
- 指数関数の性質とそのグラフの概形
- 指数方程式

- 対数とは何か
- 対数の性質と指数法則との関係

対数の定義

- $a>0$ と $A>0$ に対し，「a を何乗したら A になるか？」を考える．つまり，$\boxed{a^x = A}$ を満たす x を求める問題を考える．

例１）$a=2, A=4$ のとき，$2^2=4$ より，$x=2$.

例２）$a=2, A=8$ のとき，$2^3=8$ より，$x=3$.

例３）$a=2, A=6$ のときは？ $2^x=6$ を満たす x は？

- $a^x=A$ を満たす x を「底を a とする真数 A の対数」といい，$\log_a A$ と表す．

- つまり，$\boxed{a^x = A} \iff \boxed{x = \log_a A}$
  - $\log_a A$ は「$a^{\log_a A} = A$」を満たす数である．
  - $x=\log_a A$ を $a^x=A$ の対数表記という．
  - $a^x=A$ を $x=\log_a A$ の指数表記という．

対数の定義

$$\boxed{a^x = A} \iff \boxed{x = \log_a A}$$

注意

- $\underline{a > 0}$ は, 指数 a^x を定めるために必要な条件.
- $a = 1$ のときは任意の x に対して $a^x = 1$ なので, $\log_1 A$ は $A = 1$ のときしか意味をもたない.
- 定義から $a^x > 0$ なので, $\boxed{A > 0}$ が導かれる. これを真数条件という.

対数の性質と指数法則

(対数 1) $\log_a a = 1 \iff a^1 = a$

(対数 2) $\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$

(対数 3) $\log_a(XY) = \log_a X + \log_a Y \iff a^x \times a^y = a^{x+y}$

(対数 4) $\log_a \left(\dfrac{X}{Y}\right) = \log_a X - \log_a Y \iff a^x \div a^y = a^{x-y}$

(対数 5) $\log_a X^y = y \times \log_a X \iff (a^x)^y = a^{xy}$

(対数 6) 底の変換公式 $\log_a X = \dfrac{\log_b X}{\log_b a}$

※右辺の対数の底 b は, $\underline{b > 0}$ かつ $\underline{b \neq 1}$ を満たす数であれば,

どんな値でもよい.

常用対数と自然対数

- 底が 10 の対数 $\log_{10} A$ を常用対数という.

  例）数 α が k 桁の数ならば, $10^{k-1} \leq \alpha < 10^k$.

  したがって, $k - 1 \leq \log_{10} \alpha < k$ を満たす.
- 一方で，数学的にとても重要なものに自然対数がある.
  - 自然対数の底は e を表される. 無理数で 2.718281828459....
  - ネイピア数ともよばれる（詳細は, 「基礎数学 II」で述べる）.

注意

- 工学では, 常用対数を $\log A$ と, 自然対数を $\ln A$ と表す場合が多い.
- 一方, 数学では $\log A$ と書けば, それは自然対数 $\log_e A$ のことである.

まとめと復習（と予習）

- 対数, 底, 真数とは何ですか？
- 対数はどのような性質を満たしますか？

教科書 p.36〜39

問題集 21〜24

予　習 関数のグラフ（第１回）